1 baseline > avec les composantes en signalétique seco

LICENCE 3 FORMATION INTERUNIVERSITAIRE DE PHYSIQUE

........................................................................................... NOTES DE COURS D’HYDRODYNAMIQUE (2016-2017)

...........................................................................................

Marc Rabaud Laboratoire FAST, bât. 502, 91405 Orsay cedex rabaud@fast.u-psud.fr

"Dompter la vague avec une planche", Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik, Pour la Science 466 - Août 2016.

2

Table des matières

1 Notion de milieu continu 11 1.1 Qu’est-cequ’unfluide? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.2 Notion d’échelle mésoscopique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.3 Notionde«particulefluide» . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.4 Vitessed’uneparticulefluide . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13 1.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie) . . . . . . . . . . . 13 1.5 Trajectoire de particules, lignes d’émission, de courant et de temps . . . . . . . . . . 13 1.5.1 Trajectoire de particule (particle path)..................... 14 1.5.2 Ligne d’émission (streakline) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.5.3 Ligne de courant (streamline) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.5.4 Ligne de temps (timeline) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 1.5.5 Changementderéférentiel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 1.6 Fonctiondecourant . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16 1.6.1 Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaires planes 16 1.6.2 Ecoulement axisymétique - Fonction de Stokes - . . . . . . . . . . . . . . . 16 1.7 Dérivée locale et dérivée particulaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17 1.8 Description eulérienne et description lagrangienne des champs . . . . . . . . . . . . 18

2 Analyse dimensionnelle et similitude 19 2.1 Théorème π oudeBuckingham . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19 2.2 Exemple de la traînée d’une sphère . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21 2.3 Période des oscillations d’un pendule pesant . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 2.4 «Démonstration» duthéorèmedePythagore . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 2.5 Questionsetremarques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 2.6 Notiondesimilitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 2.6.1 Similitudepourunemaquettedenavire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 2.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons? . . 25 2.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre? . . . . . . . 25 2.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur? . . . . . 26 2.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n’ont-elles pas inventé le feu? . . . . . . . 27

3 Le théorème du transport 29 3.1 Notion de volume de contrôle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 3.2 ThéorèmedeLeibnitz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 3.3 Théorème du transport d’une fonction scalaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30 3.4 Conservationdelamasse . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

3

4 TABLE DES MATIÈRES

3.4.1 Démonstration . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31 3.4.2 Cas particulier d’un fluide incompressible. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31 3.5 Théorème du transport d’une fonction vectorielle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31 3.6 Application au transport de la quantité de mouvement . . . . . . . . . . . . . . . . . 32 3.7 Application à la traînée d’un cylindre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33 3.8 Transportdel’énergie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

4 Le tenseur des contraintes 37 4.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37 4.2 Le tenseur des contraintes [σ] (stress tensor) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38 4.3 Symétriesdutenseurdescontraintes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38 4.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque σ( n) . . . . . . . . . . . . . . 39 4.5 Le tenseur des contraintes visqueuses [σ ] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40 4.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de [σ ] . . . . . . . . . . . . . . 40

5 Fluides parfaits : équations d’Euler et de Bernoulli 43 5.1 Equationd’Euler . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43 5.2 EquationdeBernoulli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44 5.3 Généralisationdel’équationdeBernoulli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 5.3.1 Cas d’un fluide barotrope . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 5.3.2 Cas d’un écoulement instationnaire mais irrotationnel . . . . . . . . . . . . . 46 5.3.3 EffetCoanda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47 5.4 Quelquesapplicationsdel’équationdeBernoulli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47 5.4.1 AnémomètreàtubedePitot . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47 5.4.2 EffetVenturietdébitmètredeVenturi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48 5.4.3 Expérienced’EvangelistaTorricelli(1644) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49 5.4.4 Amplification des vagues par le vent . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50 5.4.5 Jetincidentsuruneplaque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51 5.5 Conservation de la circulation (théorème de Kelvin) . . . . . . . . . . . . . . . . . 51 5.5.1 EffetMagnus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52 5.5.2 Portanced’uneaile . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53 5.6 Paradoxeded’Alembert . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

6 La tension de surface 55 6.1 Originemicroscopique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56 6.2 LaloideLaplace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58 6.3 Angle de mouillage macroscopique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60 6.3.1 Loid’équilibred’Young-Dupré . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61 6.3.2 Hystérésisdel’angledecontact . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62 6.4 Effetdelagravitéetlongueurcapillaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62 6.5 Lamesuredelatensionsuperficielle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 6.5.1 LaloideJurin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 6.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64 6.5.3 Méthode de la goutte pendante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65 6.5.4 Méthode de la goutte tournante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66 6.6 Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni) . . . . . . . . . . 66 6.7 Lestensioactifs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

TABLE DES MATIÈRES 5

6.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains? . . . . . . . . . . . . . . 66 6.7.2 Comment expliquer la stabilité des membranes de savon contrairement aux

membranesd’eau? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67 6.8 Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface . . . . . . . 67

7 Les ondes de surface 69 7.1 Rappels sur les vitesses de phase et de groupe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70 7.2 Lesondeslinéaireseneauprofonde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70 7.2.1 Relation de dispersion des ondes entre deux fluides . . . . . . . . . . . . . . 71 7.2.2 Application aux ondes à la surface de l’eau . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73 7.2.3 Paquet d’onde généré par un caillou jeté dans l’eau . . . . . . . . . . . . . . 75 7.2.4 Ondes en amont et en aval d’un obstacle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77 7.2.5 Lesillageen«V» ousillagedeKelvin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77 7.2.6 Traînée de vague et vitesse limite de coque . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80 7.2.7 Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague . . . . . . . . . . 82 7.2.8 Energietransportéeparlahoule . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85 7.2.9 Atténuation des ondes de surface . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86 7.3 Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87 7.3.1 Relationdedispersionenhauteurd’eaufinie . . . . . . . . . . . . . . . . . 87 7.3.2 Casdesondeslongues . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88 7.4 Lesondesnon-linéaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90 7.4.1 LesolitondeRussel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91 7.4.2 Ressauthydraulique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91 7.4.3 Mascaret . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92 7.4.4 Tsunami . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

8 Les fluides stratifiés 95 8.1 LafréquencedeBrunt-Vaïsälä . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95 8.2 Réalisationexpérimentaled’unliquidestratifié . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97 8.3 Relationdedispersiondesondesdegravité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97 8.3.1 Structuredesondesinternes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98 8.3.2 Ondesocéanes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99 8.3.3 Réflexiondesondesinternes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99 8.4 Ondesatmosphériques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100 8.5 Pourensavoirplus:. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100

9 La viscosité 103 9.1 Tenseur des déformations [ε] (strain tensor) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103 9.2 Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse [G] . . . . . . . 104 9.2.1 Décompositiond’untenseur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104 9.2.2 Partie symétrique de [G] ou tenseur [e] desdéformationspures . . . . . . . . 105 9.2.3 Partie antisymétrique de [G] ou tenseur [ω] desrotationspures . . . . . . . . 105 9.3 Equationconstitutivedesfluidesnewtoniens . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107 9.4 Divergencedutenseurdescontraintesvisqueuses . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108 9.5 EquationdeNavier-Stokespourunfluidenewtonien . . . . . . . . . . . . . . . . . 108 9.6 Significationphysiquedelaviscosité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109 9.7 Mesuredelaviscosité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

6 TABLE DES MATIÈRES

9.7.1 Quelquesviscosimètressimples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111 9.7.2 Quelquesexemplesderhéomètre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

10 L’équation de Navier-Stokes 115 10.1 Adimensionnementdel’équationdeNavier-Stokes . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115 10.1.1 QuelquesvaleursdenombresdeReynolds. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117 10.1.2 Quelquesautresnombressansdimension . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118 10.2 Lesconditionsauxlimitescinématiquesetdynamiques . . . . . . . . . . . . . . . . 118 10.2.1 Lesconditionscinématiques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118 10.2.2 Lesconditionsdynamiques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121 10.2.3 Tableaurécapitulatifdesconditionsauxlimites . . . . . . . . . . . . . . . . 123 10.3 Solutionsexactesdel’équationdeNavier-Stokes:lesécoulementsparallèles . . . . 123 10.3.1 EcoulementdeCouetteplan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124 10.3.2 EcoulementdeCouettecirculaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124 10.3.3 EcoulementdePoiseuilleplan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125 10.3.4 EcoulementdePoiseuilleenconduitecirculaire . . . . . . . . . . . . . . . . 126 10.3.5 Solutionsinstationnaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126 10.4 Solutions de Navier-Stokes à très faible nombre de Reynolds (écoulements de Stokes) 128 10.4.1 L’équationdeStokes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128 10.4.2 Ecoulementautourd’unesphère:forcedeStokes . . . . . . . . . . . . . . . 129 10.4.3 Applicationàlasédimentation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133 10.4.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds . . . . . . . . . . . 133 10.5 Solutions de Navier-Stokes pour les écoulements quasi-parallèles (équations de lubri-

fication) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 134 10.5.1 Calculd’unpalierlubrifié . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 136 10.5.2 Forced’adhérencesurundisque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

11 La couche limite 141 11.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141 11.2 Couchelimitelaminairesuruneplaqueplane . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142 11.2.1 LeséquationsdePrandtl(1904) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142 11.2.2 ProfildevitessedeBlasius(1907) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143 11.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée . . . . . . . . . . 145 11.2.4 Définitionsdel’épaisseurd’unecouchelimite . . . . . . . . . . . . . . . . . 146 11.3 Décollementdelacouchelimitesuruneparoicourbée . . . . . . . . . . . . . . . . 147 11.4 EquationdeFalkner-Skan(1930) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148 11.5 Couchelimitethermiquelaminaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150 11.6 Couchelimiteturbulente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150

12 Dynamique de la vorticité 151 12.1 Equationdelavorticité(ouéquationd’Helmholtz) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151 12.2 Quelquesexemplesdevorticitélocalisée . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153 12.3 RappelssurlacirculationetlethéorèmedeKelvin . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155 12.3.1 QuelquesconséquencesduthéorèmedeKelvinpourunfluideparfait . . . . 155 12.4 DécompositiondeHelmholtzetloideBiotetSavart . . . . . . . . . . . . . . . . . 156

TABLE DES MATIÈRES 7

13 La portance sur une aile 159 13.0.1 Etudedudécollage . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161 13.0.2 UtilisationdelapolaireEiffel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162 13.0.3 Casd’unvoilier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164 13.1 Nageetvolanimal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165 13.1.1 Lesoiseaux . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165 13.1.2 Lespoissons . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165

14 Ecoulements potentiels et potentiel complexe des vitesses 169 14.1 Potentiel scalaire des vitesses Φ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169 14.2 Fonction de courant Ψ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170 14.3 Les fonctions Ψ et Φ dequelquesécoulementssimples . . . . . . . . . . . . . . . . 170 14.4 Potentiel complexe des vitesses f(z)=Φ+ iΨ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 171 14.5 Vitesse complexe w(z) = df/dz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172 14.6 Circulation complexe C(z) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172 14.7 Force complexe  ̃F(z) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173 14.8 Moment d’une force M . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174 14.9 Latransformationconforme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174 14.9.1 LatransformationdeJoukowski . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175 14.9.2 LatransformationdeSchwarz-Christoffel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175 14.9.3 ThéorèmedeKelvin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176

15 Les fluides en rotation 179 15.1 Changementderéférentiel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 180 15.2 EquationdeNavier-Stokesdansunréférentieltournant . . . . . . . . . . . . . . . . 180 15.3 Equationdelavorticitédansunréférentieltournant . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181 15.4 NombredeRossbyetnombred’Ekman . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181 15.5 Ecoulementsgéostrophiques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 182 15.5.1 ThéorèmedeTaylor-Proudman . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184 15.5.2 LescolonnesdeTaylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184 15.6 Coucheslimitesetrecirculations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184 15.6.1 Couched’Ekman . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184 15.6.2 Ecoulement de Kármán au-dessus d’un disque tournant infini . . . . . . . . . 186 15.6.3 Miseenrotation(spin-up)etarrêtdelarotation(spin-down) . . . . . . . . . 186 15.6.4 CouchedeStewartson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188 15.6.5 Ecoulement secondaire dans les méandres d’une rivière . . . . . . . . . . . . 188 15.6.6 RecirculationdeDean . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 15.6.7 Vorticitépotentielledanslesfluidesenrotation.Théorèmed’Ertel(1942) . . 189 15.7 Ondesinertielles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 15.7.1 Etudequalitative . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 15.7.2 Casd’uneondeplane . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 15.7.3 Ondes inertielles axisymétriques (d’après Batchelor [4] p. 559) . . . . . . . . 190 15.7.4 Ondes de Rossby entre deux plans non parallèles (d’après Tritton [50] p. 232) 192

8 TABLE DES MATIÈRES

16 Les instabilités 193 16.1 Quelquesinstabilitésmécaniques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 194 16.1.1 L’instabilitéd’unebilledansunanneautournant . . . . . . . . . . . . . . . 194 16.1.2 L’instabilitédel’anneautournantauboutd’unfil . . . . . . . . . . . . . . . 195 16.1.3 L’instabilitédeflambage . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195 16.2 Instabilitédel’écoulementdePoiseuilleentube . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195 16.3 Instabilitésgravitaire:l’instabilitédeRayleigh-Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . 196 16.4 Instabilités de cisaillement : l’instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . . . . . . . . . . . 198 16.4.1 Descriptionphysique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 199 16.4.2 EquationdeRayleighpourunprofilcontinudevitesse . . . . . . . . . . . . 200 16.4.3 EquationdeOrr-Sommerfeldpourunprofilcontinudevitesse . . . . . . . . 201 16.4.4 Analyse de stabilité pour un profil de vitesse discontinu . . . . . . . . . . . . 201 16.4.5 Casd’unprofildevitessecontinu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 203 16.4.6 Casduventsurlamer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204 16.4.7 Analysespatialedestabilité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204 16.5 Instabilitéparamétrique:l’instabilitédeFaraday . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204 16.5.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204 16.5.2 Analysedesperturbations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 205 16.5.3 EquationdeMathieu(1868) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 206 16.5.4 Effetdeladissipation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207 16.6 Instabilitésvisqueuses:l’instabilitédeSaffman-Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . 208 16.6.1 LoideDarcy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208 16.6.2 Descriptionqualitativedel’instabilité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210 16.6.3 Analyselinéairedel’instabilité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 211 16.6.4 Evolutionnon-linéairedel’instabilité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213 16.7 Instabilitéscentrifuges:l’instabilitédeTaylor-Couette . . . . . . . . . . . . . . . . 215 16.7.1 CritèreinviscidedeRayleigh . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215 16.7.2 Autresinstabilitéscentrifuges: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216 16.8 Instabilités de convection thermique : 1) convection de Rayleigh-Bénard . . . . . . . 218 16.9 Instabilités de convection thermique : 2) Instabilité de Bénard-Marangoni. . . . . . . 218 16.10ThéorèmedeSquire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 219 16.11Instabilitéconvectiveouinstabilitéabsolue? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 219 16.12Autresinstabilités . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 220

17 Introduction à la turbulence 223 17.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223 17.1.1 Exemplesd’écoulementturbulent . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223 17.2 Descriptionstatistiquedelaturbulence . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224 17.2.1 Valeursmoyennesetfluctuations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 225 17.2.2 Equationsdelaturbulence . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226 17.2.3 LetenseurdeReynolds . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226 17.2.4 L’apportdelasimulationnumérique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228 17.2.5 Mesuresdesvitessesetdesfonctionsdecorrélation . . . . . . . . . . . . . . 228 17.2.6 Notiondedensitédeprobabilité(PDF) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228 17.2.7 L’hypothèsedeTaylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 229 17.3 Lacouchelimiteturbulente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 229 17.4 Laturbulencestationnaire,homogèneetisotrope(TSHI) . . . . . . . . . . . . . . . 229

TABLE DES MATIÈRES 9

17.4.1 Spectredelaturbulence . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230 17.4.2 Quelquesdéfinitions: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230 17.4.3 Evidencedelacascaded’énergie. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231 17.4.4 SpectredeKolmogorov: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 232 17.5 Conclusion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 233

18 Personnages marquants 235

19 Lectures conseillées 241 Références . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 243

20 Formulaire 245 20.1 Opérateursdifférentiels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 245 20.2 ConservationdelamasseetéquationdeNavier–Stokes . . . . . . . . . . . . . . . . 248

10 TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Notion de milieu continu

Marc Rabaud, version du 22 janvier 2016

Sommaire

1.1 Qu’est-cequ’unfluide? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.2 Notiond’échellemésoscopique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.3 Notionde«particulefluide» . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.4 Vitessed’uneparticulefluide . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13 1.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie) . . . . . . . . . . 13 1.5 Trajectoire de particules, lignes d’émission, de courant et de temps . . . . . . . 13 1.5.1 Trajectoire de particule (particle path).................... 14 1.5.2 Ligne d’émission (streakline) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.5.3 Ligne de courant (streamline) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.5.4 Ligne de temps (timeline) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 1.5.5 Changementderéférentiel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 1.6 Fonctiondecourant . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16 1.6.1 Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaires

planes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16 1.6.2 Ecoulement axisymétique - Fonction de Stokes - . . . . . . . . . . . . . . 16 1.7 Dérivée locale et dérivée particulaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17 1.8 Description eulérienne et description lagrangienne des champs . . . . . . . . . 18

1.1 Qu’est-ce qu’un fluide ?

Un milieu continu est un milieu dont les propriétés et les champs associés sont définis en tout point, continus et dérivables. On distingue deux types de milieux continus : les solides et les fluides. Un solide est rigide (indéformable, élastique ou plastique) et même si les molécules vibrent, elles gardent les mêmes voisins. Il n’y a pas d’écoulement sous contrainte. Pour un liquide ou un gaz au contraire, sous l’action d’une contrainte donnée la déformation se poursuit indéfiniment. La mécanique des fluides s’intéresse à ces déformations infinies, ou plutôt aux vitesses de déplacement appelées taux de déformations qui caractérisent le champ de vitesse sous écoulement. D’autre part nous appellerons fluide indifféremment un gaz ou un liquide, la seule chose importante pour la mécanique des fluides étant de savoir si la masse volumique le long d’une trajectoire fluide reste constante ou non.

11

12 CHAPITRE 1. NOTION DE MILIEU CONTINU

1.2 Notion d’échelle mésoscopique

On peut définir trois échelles de longueur ou de temps pour un milieu fluide; l’échelle microsco- pique, l’échelle macroscopique et entre les deux une échelle intermédiaire que l’on nomme échelle mésoscopique.

Echelle microscopique λ

C’est l’échelle des molécules de fluides (libre parcours moyen λ ou temps moyen entre colli- sion τ). Sur cette échelle les particules ont des trajectoires balistiques (mouvement brownien) avec une vitesse microscopique moyenne donnée par la température.

Echelle mésoscopique δ

C’est une échelle de taille supérieure à quelques dizaines de libre parcours moyen. A cette échelle on peut déjà effectuer une moyenne spatiale sur un volume, moyenne relativement significative et peu fluctuante car il y aura déjà quelques milliers de particules, et définir une vitesse moyenne sur ce volume. Ce volume mésoscopique porte le nom de particule fluide. A l’équilibre thermodynamique, la distribution de vitesse brownienne est isotrope et l’on trouve une vitesse moyenne ou vitesse fluide nulle. Hors équilibre, par exemple avec une pression inhomogène, il existe un écoulement et donc une vitesse non nulle de la particule fluide.

Echelle macroscopique L

C’est l’échelle de variation des champs de vecteurs (vitesse v, accélération a, ...) ou scalaire (pression P, masse volumique ρ, température T, ...). Si cette échelle est suffisamment grande devant l’échelle mésoscopique, on peut faire de la Physique du milieu continu, c’est-à-dire supposer que les grandeurs sont définies en tout point r et tout temps t, on écrira par exemple v( r, t) ou ρ( r, t).

On supposera donc toujours ici que λ ≪ δ ≪ L. Etablir les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes) à partir des proprié- tés microscopiques et de la thermodynamique hors équilibre (équation de Boltzmann) est une tâche ardue qui suppose de prendre des moyennes sur ces différentes échelles. Dans certaines hypothèses la démonstration a été faite par Chapman et Enskog pour un gaz monoatomique 1.

1.3 Notion de « particule fluide »

On nomme « particule fluide » une petite masse de fluide de taille mésoscopique δ. On suppose sa taille suffisamment faible, δ ≪ L, pour que l’on puisse considérer que son volume tend vers zéro (tout en restant suffisamment volumineuse pour que les valeurs locales restent statistiquement définies δ ≫ λ) et donc que l’on peut définir les dérivées des champs en tout point. Pour les fluides denses, et les échelles macroscopiques usuelles cela ne pose pas trop de problème. On peut alors faire de la Mécanique des milieux continus. Citons quelques cas délicats où il faut utiliser la mécanique statistique hors équilibre : gaz dilué comme dans les nuages interstellaires (λ ≈ 104 km et τ ≈ 5 jours), nanofluidique, ondes de choc, rentrée d’une navette spatiale dans l’atmosphère (λ > taille de la navette).

Nota : Par définition une particule fluide conserve sa masse, mais pas forcément son volume si le fluide est compressible.

1. S. Chapman et T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases. Cambridge University Press, 1960

1.4. VITESSE D’UNE PARTICULE FLUIDE 13

1.4 Vitesse d’une particule fluide

La vitesse d’une particule fluide est la moyenne sur son volume mésoscopique de la vitesse de chacune des molécules présentes à cet instant dans le volume. Notons que ce ne sont pas toujours les mêmes molécules qui constituent la particule fluide, certaines rentrent, d’autres sortent (ce phénomène caractérise la diffusion moléculaire).

Le mouvement d’une particule fluide peut toujours se décomposer en un mouvement de translation (donné par la vitesse v), de rotation (donné par un vecteur rotation instantané ω appelé en mécanique des fluides vorticité) et de déformation (donné par le tenseur des gradients de vitesse [ ∂vi ∂xj]). Nous reverrons ce point dans le chapitre 3.

1.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)

Voici quelques exemples des techniques classiques de mesure des vitesses dans un fluide. — Mesure de forces ou de couples et étalonnage. Robuste, simple mais peu précis et perturbant

l’écoulement. — Suivi de particules (particle tracking) par exemple un ballon atmosphérique, une tâche de colorant, . . . C’est une mesure dite lagrangienne car mesurée en suivant un objet à différents instants et donc à différentes positions et non pas en un point fixe. — Anémométrie à fil chaud. On mesure le refroidissement d’un fil mince parcouru par un courant

électrique. Permet d’atteindre 105 mesures par seconde. — Anémométrie laser (LDV : Laser Doppler Velocimetry). Basée sur la détection de la lumière émise par une particule traversant l’intersection de deux faisceaux lasers. Mesure non pertur- bative d’une composante de la vitesse en un point. Nécessite un fluide transparent. — Anémométrie Doppler ultrasonore. Basé sur le décalage Doppler d’une impulsion acoustique réfléchie par une particule. Permet la mesure des vitesses longitudinales sur toute une ligne de visée. — Vélocimétrie par image de particules (PIV : Particle Image Velocimetry). Basé sur la corréla- tion entre des portions d’images successives où de petites particules solides transportées par le fluide sont rendues visibles par un fort éclairage (par exemple un plan laser). Cette tech- nique permet d’obtenir par calcul informatique un champ de vitesse sur un maillage du plan des images, où plus précisément les deux composantes de la vitesse contenues dans le plan de l’image.

Les figures 1.1 et 1.2 présentent les vecteurs vitesse projetés dans un plan sur un maillage régulier. Les données pouvant venir de simulations numériques ou de mesures expérimentales.

1.5 Trajectoire de particules, lignes d’émission, de courant et de temps

De nombreuses techniques expérimentales sont utilisées pour comprendre la structure d’un écou- lement. Elles conduisent à introduire les notions de trajectoire de particules, de ligne d’émission, de ligne de courant ou de ligne de temps. Les trois premières sont équivalentes pour un écoulement sta- tionnaire (∂/∂t = 0). Ce n’est que pour un écoulement instationnaire que ces notions sont différentes.

14 CHAPITRE 1. NOTION DE MILIEU CONTINU

FIGURE FIGURE 1.1 – Carte météorologique de prévi-

1.2 – Champ de vitesse turbulent me- sion des vents.

suré par PIV.

1.5.1 Trajectoire de particule (particle path)

ment C’est on peut l’ensemble écrire : −−→OM des points occupés par une particule fluide au cours du temps. Mathématique- = r = f( r0,t) où r0 est la position de la particule à l’instant initiale. C’est donc ce que l’on appelle un suivi lagrangien (suivre le déplacement d’un objet donné au cours du temps). Par définition la tangente à la trajectoire est parallèle au vecteur vitesse qu’avait la particule à l’instant où elle passait en ce point. Un façon classique d’obtenir la trajectoire de traceurs est de prendre une photo en pause longue tout en éclairant de façon continu.

1.5.2 Ligne d’émission (streakline)

Elles sont facile à réaliser expérimentalement en prenant une photographie à un instant t d’un filet de colorant émis en continu depuis un certain temps à partir d’un point source fixe. Attention le vecteur vitesse n’a aucune raison d’être tangent à cette courbe pour un écoulement instationnaire.

1.5.3 Ligne de courant (streamline)

Ligne théorique qu’il est difficile d’observer expérimentalement mais que l’on peut calculer à l’issue d’une simulation. C’est la courbe qui, à un instant donné, est tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point. Cela suppose donc de connaître le champ de vitesse en tout point. C’est la ligne de champ classique d’un champ de vecteur à un instant donné (champ électrique par exemple). En coordonnées cartésiennes la ligne de courant est donnée par l’équation dx/u = dy/v = dz/w si v = (u,v,w).

— Deux lignes de champ ne se croisent qu’en des points de stagnation (aussi appelés points cols)

où la vitesse est nulle. — On peut aussi définir des surfaces pressible, le débit volumique que le débit massique Qm = Q∫ v ρ v = · de −→dS ∫ courant v est · −→dS obligatoirement se et conserve des tubes de courant. Pour un fluide incom- le long d’un tube de champ. Est-ce conservé? On pourra chercher un contre-exemple. Exercice : dessiner les lignes de courants, lignes d’émission et trajectoires de particules pour un écoulement homogène mais qui change de direction de 90◦ à un instant donné.

1.5. TRAJECTOIRE DE PARTICULES, LIGNES D’ÉMISSION, DE COURANT ET DE TEMPS15

1.5.4 Ligne de temps (timeline)

Position à un instant t d’un ligne marquée dans le fluide à un instant initial et transportée (on dit advectée ou convectée) ensuite par l’écoulement. Elles sont assez facile à réaliser expérimentalement et donnent une idée de la composante du vecteur vitesse normale (perpendiculaire) à la ligne.

1.5.5 Changement de référentiel

Un écoulement stationnaire dans un certain référentiel peut ne pas l’être dans un autre. De ce fait la transformation de ces différentes lignes n’est pas évidente comme l’illustre la série de figures suivantes :

FIGURE 1.3 – Ecoulement stationnaire autour d’un cylindre fixe pour un nombre de Reynolds de 40. Visualisation par lignes d’émission qui sont aussi dans ce cas des lignes de courant et des trajectoires de particules. D’après Réf. [50] p. 76.

FIGURE 1.5 – Trajectoires de particules dans le référentiel où le fluide est au repos et où le cy- lindre se déplace de droite à gauche. D’après Réf. [50] p. 78.

FIGURE 1.4 – Ligne de courant autour d’un cylindre en mouvement de droite à gauche au même nombre de Reynolds dans un référentiel où le fluide est initialement au repos. D’après Réf. [50] p. 76.

FIGURE 1.6 – Trajectoire de particules piégées dans les tourbillons de recirculation dans le ré- férentiel où le fluide est au repos (noter l’échelle transverse dilatée). D’après Réf. [50] p. 79.

16 CHAPITRE 1. NOTION DE MILIEU CONTINU

FIGURE 1.7 – Lignes d’émission dans le référentiel où le fluide est au repos. D’après Réf. [50] p. 79.

1.6 Fonction de courant

conduit on le Pour fait à un pour l’équation écoulement le champ div v électromagnétique incompressible = 0 (voir chapitre nous B 3 page verrons = −→rot 29) A). que et Le on l’hypothèse vecteur peut donc A est écrire de appelé conservation que le v potentiel = −→rot de A la (comme vecteur masse

du champ de vitesse v et v satisfait alors obligatoirement la condition d’incompressibilité. Noter que A est défini à une jauge près et que A = A + ∇C est aussi solution. Cette transformation est en général peu utile (on transforme un champ de vecteur en un autre champ vectoriel moins intuitif) sauf si l’écoulement est 2C2D, c’est-à-dire s’il n’a que deux composantes (2C) de vitesse non nulles et qu’elles ne dépendent que deux dimensions d’espace (2D). En effet comme nous allons le détailler ci-dessous la connaissance du champ de vitesse se ramène alors à la connaissance d’un scalaire, la fonction de courant ψ.

1.6.1 Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaires planes

Supposons un écoulement plan d’un fluide incompressible, ou plus précisément un écoulement 2C2D : v = (u(x, y),v(x, y),0), c’est-à-dire sans composante selon Oz. Alors on peut écrire :

v = −→rot

(ψ k)

, (1.1)

soit u = ∂ψ∂y et v = −∂ψ∂x. La variable scalaire ψ est appelé la fonction de courant car elle garde une valeur constante sur une ligne de courant ( ∇(ψ) · v = 0). Qv = Nota ∫ A B: u Le · −→ds débit = ∫ par A B(unité ∂ψ∂y ex de − ∂ψ∂x longueur ey) · (−→dl transverse ∧ ez) = est ∫ BA constant dψ entre deux = ψB − ψA.

lignes de courant et vaut

1.6.2 Ecoulement axisymétique - Fonction de Stokes -

Dans le cas d’un écoulement incompressible 2C2D axisymétrique (sans composante orthoradiale) on doit utiliser une autre définition de la fonction de courant, la fonction de Stokes.

— En coordonnées cylindriques : v = (ur(r, z),0,uz(r, z)) et l’on peut écrire :

v = −→rot

(−ψ(r, r z)

eθ)

. (1.2)

— En coordonnées sphériques : v = (ur(r, θ),uθ(r, θ),0) et l’on peut écrire :

v = −→rot

(ψ(r, rsinθ θ)

eφ)

. (1.3)

1.7. DÉRIVÉE LOCALE ET DÉRIVÉE PARTICULAIRE 17

Là encore, connaître ψ suffit pour connaître le champ vectoriel de vitesse v.

Remarque : Pour un écoulement compressible instationnaire ou 3D3C, il n’existe pas de fonction de courant.

Exercice : Vérifier que la fonction ψ est bien constante sur une ligne de courant (dψ = 0) dans les trois systèmes de coordonnées.

1.7 Dérivée locale et dérivée particulaire

En mécanique des fluides on peut s’intéresser à des variations temporelles locale (en un point fixe) mais aussi à des variations "particulaires", c’est-à-dire en suivant les particules fluides. Il apparaît alors deux contributions, la variation au cours du temps de la fonction en un point coïncidant fixe d’une part et la variation dues au fait que le point explore des lieux différents de l’espace.

Prenons un exemple. Lors d’un trajet en voiture vous mesurez l’évolution de la température ex- térieure. Il fait par exemple 15◦ à Paris à 8 heures du matin et 35◦ à Marseille à 16 heures. Dans la voiture vous connaissez donc la variation de la fonction T au cours du temps, dTdt , mais en différents points d’espace au cours du temps. Vous ne connaissez pas séparément ∂T∂t ou ∂T∂x. Soit T une fonction scalaire de plusieurs variables T( r, t). On peut écrire :

dT = ∂T∂t dt + ∂T∂x dx + ∂T∂y dy + ∂T∂z dz.

Soit : dTdt = ∂T∂t + ∂T∂xu + ∂T∂y v + ∂T∂z w ,

avec u = dx/dt, v = dy/dt et w = dz/dt.

Traditionnellement en mécanique des fluides on note cette dérivée totale DTDt = dTdt pour bien attirer l’attention sur le fait que cette dérivée totale n’est vraiment pas une dérivée partielle! Sous forme vectorielle on a donc :

DTDt = ∂T∂t + v · ∇(T) .

On a le même calcul pour une fonction vectorielle. Chacune de ses composantes est un scalaire ayant une dérivée particulier donnée par l’équation précédente. D’une façon symbolique on peut alors écrire pour tout vecteur A sa dérivée particulier :

D ADt = ∂ A∂t + ( v · ∇) A ou encore sous forme d’opérateur :

D ·Dt = ∂ ·∂t + ( v · ∇)·

Par exemple l’accélération d’une particule fluide (dérivée particulier car en suivant la particule) est donnée par :

D vDt = ∂ v∂t + ( v · ∇) v . (1.4)

18 CHAPITRE 1. NOTION DE MILIEU CONTINU

Le premier terme du membre de droite est le terme d’accélération locale (en un point fixe), le second, parfois appelé dérivée convective, l’accélération due aux variations spatiales du champ de vitesse à un instant donné. Attention à la concision de la notation, ce deuxième terme résume en fait 9 termes de la forme vi ∂vj ∂xi. Nous utiliserons ces notions dans les prochains modules, mais nous pouvons déjà annoncer qu’une grande partie des difficultés de la mécanique des fluides vient de ce second terme car il est non-linéaire : si la vitesse est doublée, ce terme est multiplié par 4.

1.8 Description eulérienne et description lagrangienne des champs

On dit qu’un champ est décrit de façon eulérienne si on connait sa valeur en tout point d’espace et de temps indépendamment : e.g. le champ de température T( r, t) ou le champ de vitesse v( r, t). Le même champ est décris de façon lagrangienne si l’on connait la position de chaque particule fluide r(t) au cours du temps et le champ comme fonction de ces deux variables r(t) et t : e.g. T( r(t),t) et v( r(t),t). Cette deuxième représentation est plus complexe, mais plus physique quand il faut par exemple exprimer le principe fondamental de la dynamique.

Chapitre 2

Analyse dimensionnelle et similitude

Marc Rabaud, version du 22 janvier 2016

Sommaire

2.1 Théorème π oudeBuckingham. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19 2.2 Exempledelatraînéed’unesphère . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21 2.3 Périodedesoscillationsd’unpendulepesant . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 2.4 «Démonstration» du théorème de Pythagore . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 2.5 Questionsetremarques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 2.6 Notiondesimilitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 2.6.1 Similitudepourunemaquettedenavire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 2.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons? . 25 2.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre? . . . . . . 25 2.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur? . . . . 26 2.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n’ont-elles pas inventé le feu? . . . . . . 27

Les mathématiciens et les physiciens théoriciens résolvent des équations adimensionnées dont les paramètres et les coefficients sont des nombres réels ou complexes. Pourtant concrètement le physi- cien cherche des relations entre des quantités qui ont une dimension; des forces, des énergies, des viscosités, des tailles ou des masses volumiques par exemple. Ces dimensions sont toutes exprimables dans une base de dimensions, par exemple le Système International (SI), ou simplement masse, lon- gueur et temps dans la plupart des applications en mécanique. Ce choix n’est pas unique, on peut par exemple préférer un système construit avec une force, une énergie, etc. Nous savons qu’une équation, pour avoir un sens, doit être « homogène en dimension ». Mais on peut aller un peu plus loin, et prédire à partir d’une hypothèse réaliste sur les paramètres pertinents la dépendance d’une quantité en fonc- tion des autres variables et d’un certain nombre de « nombres sans dimension » dont la mécanique des fluides est si friande.

Présentons maintenant plus formellement la méthode de l’analyse dimensionnelle avant d’étudier un exemple au § 2.2 page 21.

2.1 Théorème π ou de Buckingham

Traduit de l’article de Bernard Castaing [8], pages 62-64.

19

20 CHAPITRE 2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

Il semble que l’analyse dimensionnelle ait été utilisée au moins depuis Galilée. Elle est utilisée depuis longtemps pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides, et c’est maintenant un outil courant en physique. [. . .] L’idée de base est bien connue. Imaginons qu’une expérience ait été réalisée avec des conditions aux limites particulières et que tout ait été exprimé dans le Système International (SI ou MKSA). Pour l’exprimer en CGS nous multiplions simplement les nombres représentant les longueurs par 102, les masses par 103, les densités par 10−3. Mais imaginons que nous oubliions de le faire et changions simplement le nom des unités. Notre résultat serait celui d’un nouveau problème où les longueurs seraient 102 fois plus petites, les masses 103 fois plus petites et les densités 103 fois trop grandes. En résolvant notre problème, nous avons donc résolu toute une classe de problèmes équivalents. En réalité ce n’est peut-être pas très utile car peu de liquides ont des densités 103 fois supérieures à celle de l’eau par exemple ! Certaines quantités doivent être maintenues constantes (la vitesse de la lumière par exemple) si elles ont quelques importances. Formalisons cela en utilisant les travaux de Edgar BUCKINGHAM (Phys. Rev., 14, 345 (1914)). Soit y1,··· ,yn les paramètres (conditions aux limites, quantités importantes) et y la quantité inconnue. Nous recherchons une relation mathématique :

y = f(y1,··· ,yn).

Soit A1,··· ,Am les m dimensions indépendantes (M pour la masse, T pour le temps, ···). Nous verrons que le nombre de dimensions indépendantes n’est pas déterminé de façon évidente mais sup- posons qu’il le soit. Alors les dimensions des yi s’expriment en fonction des Aj :

[yi] = Aα1 1i ,··· ,Aαm mi .

L’expression :

y1 x1y2 x2···yn xnsera sans dimension si les m équations :

∑ni=1

αji xi = 0

sont satisfaites. Nous pouvons alors former n − m quantités sans dimensions « indépendantes » : π1,··· ,πn−m. Prenons mètres restants. Ces y i ont ces des quantités dimensions comme indépendantes nouveaux paramètres, et il existe et des appelons exposants y 1,··· βi ,y m les tels que :

para-

[y]=[y 1]β1 ··· [y m]βm.

Alors l’expression

π = y y 1 −β1 ··· y m −βm est sans dimension et est une fonction de tous les paramètres :

π = h(y 1 ··· y m,π1,··· ,πn−m).

Ni π, ni les valeurs de πi ne dépendent du système d’unité. Nous pouvons donc choisir ces unités pour que tous les y i = 1 et :

π = h(1 ··· 1,π1,··· ,,πn−m) = g(π1,··· ,πn−m).

2.2. EXEMPLE DE LA TRAÎNÉE D’UNE SPHÈRE 21

Ceci est le théorème de Buckingham : une quantité inconnue sans dimension peut uniquement dé- pendre des nombres sans dimension formés à partir des paramètres. Le cas le plus intéressant cor- respond au cas où on ne peut former aucun paramètre sans dimension. Alors la fonction g est une constante g0 et le problème est entièrement résolu à cette constante multiplicative près :

y = g0 y β1 1 ··· y βmm .

[. . .]On peut choisir autant de dimensions indépendantes que l’on veut. Cela introduit simplement des facteurs de conversion qui agissent comme de nouveaux paramètres. Cela n’a pas d’intérêt sauf si l’on sait que ces facteurs ne peuvent pas intervenir dans le problème. Par exemple, on considère habituellement que le temps et une longueur ont des dimensions différentes. Pourtant, à cause de la théorie de la relativité, c’est artificiel et cela introduit un « facteur de conversion » qui est la vitesse de la lumière. En mécanique classique, nous savons que ce paramètre ne va pas intervenir, ce qui donne tout son intérêt à distinguer le temps et l’espace.

• Attention, l’analyse dimensionnelle est un outil extrêmement puissant, mais aussi très dange- reux! Si l’on oublie ou si l’on se trompe sur le choix des variables physiques à considérer le résultat devient faux. Le « sens physique » doit permettre de sélectionner les variables indépendantes perti- nentes.

2.2 Exemple de la traînée d’une sphère

Appliquons maintenant ce théorème sur un premier exemple concret. On cherche à calculer la force de traînée d’une sphère dans un liquide visqueux. On recherche une solution stationnaire FD du problème. De quoi peut-elle dépendre? Certainement du rayon R de la sphère, de la vitesse U de déplacement de l’obstacle par rapport au liquide et de la viscosité ν du liquide (cette propriété sera décrite dans le module 9) quantité qui différentie par exemple le mouvement dans l’eau du mouvement dans du miel. L’analyse dimensionnelle nous donne :

— dimension de R, une longueur. Ce que l’on note [R] = L. — [U] = L/T où T est un temps. — [ν] = L2/T. — [FD] = ML/T 2 où M est une masse. Comme il n’y a pas de masse dans les trois premières variables on ne peut pas avoir d’équation du type FD = f(R, U, ν). Il y a forcément une autre variable contenant une unité de masse qui intervient dans le problème. Peut-être la masse volumique ρ du fluide. Attention si l’on met ici autre chose comme la masse volumique de la sphère, ou sa masse, . . .on peut trouver des résultats justes au niveau des dimensions mais incorrects au point de vue de la physique. L’intuition physique a donc beaucoup d’importance à ce niveau. Formellement on peut tout à fait mettre ici la masse de l’expérimentateur, ou même celle de sa belle-mère, mais ce n’est pas forcément pertinent !

Supposons donc que nous écrivions que FD = f(R, U, ν, ρ) nous aurons donc à satisfaire l’équa- tion aux dimensions [FD]=[R]α[U]β[ν]γ[ρ]δ soit ML/T 2 = Lα(L/T)β(L2/T)γ(M/L3)δ. Ce qui nous donne un système de 3 équations et 4 inconnues, avec par exemple comme solution δ = 1, γ = 2 − α, β = α avec α libre. On peut donc écrire

FD = RαUαν2−αρF(Re)

22 CHAPITRE 2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

où Re = U 2Rν = U Dν est appelé le nombre de Reynolds et c’est le seul nombre sans dimension que l’on peut fabriquer avec les variables R, U, ν, ρ (vérifiez-le). Pour α = 2 on peut écrire une forme équivalente plus simple :

FD = ρU2R2F (Re).

On définit souvent le coefficient de traînée (sans dimension), CD parfois aussi appelé Cx en fran- çais par :

CD = FD

12ρU2A, où A = πR2 est l’aire de la section de l’obstacle.

Notre analyse dimensionnelle nous prédit que CD = f(Re). C’est en effet ce que l’on observe expérimentalement (figure 2.1). A faible nombre de Reynolds on démontrera (§10.4.2) le résultat exact CD = 24/Re. Ceci montre que la force de traînée FD augmente d’abord comme la vitesse à faible Re puis comme le carré de la vitesse lorsque CD ≈ cste, sauf au moment du décrochement appelé crise de traînée pour Re ≈ 400 000.

Lorsque le Reynolds n’est pas très petit devant l’unité, Oseen a calculé le terme correcteur (valable si Re ≤ 5) : CD = 24Re(1 + 316Re).

Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d’assez bon résultats jusqu’à la crise de traînée (Re ≤ 400 000) par exemple la relation de White :

CD = 24Re + 6

1 + √Re + 0,4.

FIGURE 2.1 – Evolution de la traînée adimensionnée d’une sphère ou d’un cylindre par unité de longueur en fonction du nombre de Reynolds. Noter les échelles logarithmiques. D’après Réf. [2] page 441.

• Applications : — Calculer la traînée sur une balle de tennis à 200 km/h. R = 33 mm, νair = 15 10−6 m2/s,

ρair = 1,29Kg/m3. Comparer au poids de la balle (M = 50 g).

2.2. EXEMPLE DE LA TRAÎNÉE D’UNE SPHÈRE 23

Notons que si la sphère n’est pas lisse (cas d’une balle de golf par exemple, du duvet de la balle de tennis) il apparaît au moins une nouvelle variable sans dimension (par exemple le rapport rugosité/rayon comme sur la figure 2.2). De même s’il existe plus d’une dimension (un ellipsoïde de révolution plutôt que sphère par exemple) alors l’analyse dimensionnelle prédit l’existence d’au moins un autre nombre sans dimension, par exemple le rapport grand axe sur petit axe a/b si on a affaire à une ellipsoïde de révolution. Ensuite le problème peut aussi dépendre de l’angle α entre l’axe de l’ellipsoïde et l’écoulement. Alors on aura CD = f(Re, a/b, α).

FIGURE 2.2 – Effet de la rugosité sur la crise de traînée d’une sphère. D’après Réf. [2].

— Calculer le fardage (force de traînée) dû au mât de 20 mètres de haut d’un voilier dans un vent de 30 Nœuds (≈ 60 km/h) si R = 10 cm (le CD d’un cylindre est environ le double de celui d’une sphère dans cette gamme de nombre de Reynolds). — Calcul de la traînée sur une plaque plane infiniment mince. Pour une plaque mince de largeur b et de longueur l (dans le sens de l’écoulement) on pose CD = D 12ρU2A = f(Re, b/l), où A = b×l et Re = Ul/ν. On suppose que b ≪ l. Pour Re < 105 on trouve expérimentalement CD = 1,33Re−1/2 et pour Re > 106 on trouve C1/2

D log(Re CD) ≈ 0,242 ([7] p. 307). Calculer la force de traînée sur la quille d’un monocoque de type 60 pieds open. On prendra b = 3 m, l = 0,5 m, U = 10 Nœuds, ρ = 103 kg/m3 et ν = 10−6 m2/s. On trouve alors CD ≈ 3,7 10−3 et FD = 73N. On trouverait certainement nettement plus en tenant compte de l’incidence non nulle de la quille. — En ces temps de records... En athlétisme et particulièrement pour un 100 mètres il paraît que l’on ne peut espérer battre un record du monde par temps froid. Ceci est sans doute dû à l’augmentation de la force de traînée avec une baisse de température. En effet de 30◦C à 10◦C, la masse volumique de l’air ρair augmente d’environ 10 % ce qui augmente d’autant la force de traînée FD = 12ρU2ACD. — Toujours en athlétisme la plupart des records ne sont validés que si le vent favorable est infé- rieur à 2 m/s. Regardons l’effet sur la force de traînée d’un vent favorable de 2 m/s. Un coureur de 100 m a une vitesse de l’ordre de 100 m/ 10 s = 10 m/s. Il a donc selon qu’il y a du vent ou pas une vitesse relative de 8 ou 10 m/s. Comme la force de traînée FD = 12ρU2ACD varie comme le carré de la vitesse apparente, la force de traînée avec un vent dans le dos de 2 m/s est près de 40% plus faible que sans vent. C’est donc un énorme avantage.

24 CHAPITRE 2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

2.3 Période des oscillations d’un pendule pesant

Soit un pendule constitué d’une masse ponctuelle m pouvant osciller librement sous l’action de la gravité au bout d’une tige de longueur l. On recherche une expression pour la période T des oscilla- tions.1. Si l’on suppose que T = f(l) uniquement, l’analyse dimensionnelle nous montre que c’est

impossible. 2. Si l’on suppose que T = f(l, g) l’analyse dimensionnelle prédit que T ∝ √l/g ce qui n’est pas mal du tout sachant que le résultat exact pour de petites oscillations est T = 2π √l/g!

3. Si l’on suppose que T = f(l,g,a) où a est l’amplitude horizontale des oscillations on trouve

T = √l/g F(a/l).

4. Si l’on suppose que T = f(l,g,m) on trouve que T ne peut pas dépendre de m sans dépendre

d’autres variables faisant intervenir la dimension d’une masse.

5. Enfin si l’on suppose que T = f(l, g, m, η, a) où η est la viscosité de l’air, on voit apparaître

d’autres nombres sans dimension possibles.

2.4 « Démonstration » du théorème de Pythagore

(D’après [51] page 17.) Soit un triangle ABC rectangle et appelons B le sommet dont l’angle est le plus petit, et AH la hauteur passant par A et coupant BC en H. Soit a la longueur du segment BC, b la longueur de AC et c celle de AB. La surface du triangle ABC est donc la somme de la surface du triangle ACH et celle du triangle AHB : SABC = SACH + SAHB. De plus appelons α le plus petit angle du triangle, ici l’angle ̂ABC. Nous retrouvons ce même angle pour ̂CAH. Nous supposerons enfin que tout triangle rectangle est parfaitement défini par la connaissance de son hypoténuse et par la valeur de son plus petit angle. Pour respecter l’analyse dimensionnelle, la surface de tout triangle rectangle est alors égale au carré de son hypoténuse multiplié par une fonction de ce plus petit angle. Nous avons donc SABC = a2 f(α), mais aussiSACH = b2 f(α) etSAHB = c2 f(α). Comme SABC = SACH+SAHB, il vient : a2 f(α) = b2 f(α) + c2 f(α) soit a2 = b2 + c2 puisque f(α) est une constante non nulle! Nous avons démontrer le théorème de Pythagore grâce à l’analyse dimensionnelle !

FIGURE 2.3 – Démonstration du théorème de Pythagore.

2.5. QUESTIONS ET REMARQUES 25

2.5 Questions et remarques

– Pourquoi est-ce toujours une loi de puissance qui apparaît entre les variables dans le théorème Π? Parce que toute fonction peut s’exprimer localement comme la somme d’une série de termes en loi de puissance des différentes variables (développement limité) et que chaque terme doit alors satisfaire l’analyse dimensionnelle.

– Combien doit-on choisir de dimensions indépendantes? Généralement on en choisit 4 dans le Système International (SI anciennement MKSA, pour mètre, kilogramme, seconde et ampère). Mais c’est un choix relativement arbitraire. Deux dimensions sont indépendantes tant qu’il n’existe pas, dans le problème considéré, de lien physique entre ces deux dimensions. Par exemple masse et énergie ne sont plus des dimensions indépendantes en physique des particules puisque E = mc2 (surtout si l’on fait c = 1!). Par contre chaleur et travail peuvent être deux dimensions indépendantes si dans le problème considéré il n’y a pas transformation entre les deux types d’énergie.

2.6 Notion de similitude

On dit que deux problèmes sont similaires s’ils sont gouvernés par les mêmes nombres sans di- mension. Par exemple s’ils ont le même rapport d’aspect (même rapport de taille). Alors résoudre l’un des problèmes, c’est aussi résoudre l’autre. Prenons quelques exemples.

2.6.1 Similitude pour une maquette de navire

Le sillage d’un bateau et en particulier la traînée que l’eau exerce sur la coque peut être décompo- sée en plusieurs termes, en particulier la traînée de forme — caractérisé par le coefficientCD = f(Re) — et la traînée de vague — caractérisée par un coefficient Cvague = f(Fr) où Fr = U√gL est le nombre de Froude. La traînée de vague correspond à l’énergie transportée à l’infini par les ondes de surface. Pour faire une maquette en similitude, il conviendrait de choisir une échelle de réduction de toutes les dimensions géométriques et d’avoir le même nombre de Reynolds et le même nombre de Froude pour bien respecter la part relative de traînée de forme et de traînée de vague. Mais on vérifie aisément que c’est impossible, en tout cas en conservant l’eau comme fluide porteur et sans modifier g! Lorsque l’on fait des essais de traction sur maquette en bassin d’essais de carène il convient de travailler soit en « similitude de Reynolds » soit en « similitude de Froude ».

2.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?

Si on suppose les enfants et les adultes homothétiques, leur poids est proportionnel à leur volume L3 alors que la surface des pieds est proportionnelle à L2. En conséquence la pression exercée par les gravillons sur la plante des pieds est proportionnelle à L. Plus on est grand, plus ça fait mal !

2.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?

Là aussi si on fait croître de façon homothétique (sans changer la forme) la taille d’un animal, son poids augmente comme L3 alors que la section de ses fémurs par exemple croît comme L2. La contrainte de compression sur chaque fémur augmente donc comme L. S’il existe une contrainte maximale avant rupture de l’os, il existe une taille maximum pour cette espèce d’animaux.

26 CHAPITRE 2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

FIGURE 2.4 – Comparaison des tailles et donc des rapports d’aspect des squelettes de théropodes. Du plus petit au plus grand, un ornithomimus (165 kg), deux tyrannosaures (750 kg et 2500 kg) et un tyrannosaure rex (6000 kg). D’après [37] p. 126.

En l’occurrence, un fémur de mammouth n’est pas homothétique à un fémur de héron, et la fi- gure 2.4 montre que les os de théropodes (dinosaures sans doute ancêtres des oiseaux) ne sont pas homothétiques lorsque l’on passe du plus petit (160 kg) au plus gros (6000 kg).

2.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?

(D’après [49] p. 53 et [37] p. 209). Tous les animaux sautent de l’ordre de 1 mètre, et même si c’est 2m45 pour le champion Sotomayor ce n’est pas 10 mètres ni 10 centimètres. L’ordre de grandeur est donc le mètre. Et ceci est aussi vrai pour une puce qui saute de l’ordre de 400 fois sa hauteur. Pourquoi ?

Le poids varie comme L3 et l’énergie mécanique à fournir pour atteindre une hauteur h est E = mgh ∼ L3h. Or la force que peut développer un muscle, ici les cuisses, est au premier ordre proportionnel à sa section (L2) alors que le travail W qu’il peut fournir est le produit de la force par le déplacement (ici la contraction du muscle proportionnel à sa longueur L), soit W ∼ L2 × L = L3. L’égalité E = W conduit à une hauteur h de saut indépendante au premier ordre de la taille de l’animal L!

Au deuxième ordre, les puces sautent plutôt de l’ordre de 20 cm et les léopards de 2m50. On peut penser au frottement de l’air pour diminuer les performances des puces, mais le calcul montre que cela conduit seulement à une diminution de 10 %. Par contre l’accélération que peuvent supporter les animaux est peut-être en cause. En effet les animaux sauteurs comme les félins ont une poussée très longue (pattes arrières qui se déplient). Si les animaux sautent à la même hauteur h, ils ont la même vitesse de décollage V donné par 12mV 2 = mgh. D’autre part la durée de la poussée est de

2.6. NOTION DE SIMILITUDE 27

l’ordre de τ = L/V . Leur accélération est donc a ∼ V/τ ∼ V 2/L ∼ h/L. En sautant à la même hauteur, les animaux ne subissent pas du tout la même accélération, les plus petits sont soumis à la plus forte accélération. On trouve pour une puce une accélération de l’ordre de 300g ce qui doit poser d’important problème aux structures internes !

2.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n’ont-elles pas inventé le feu ?

On peut montrer que la combustion à l’air libre met en jeu des processus de diffusion de l’oxygène qui font que la taille minimum d’une flamme est de l’ordre de 2 à 3 millimètres (c’est d’ailleurs visible au moment où une allumette s’éteint, la taille de la flamme ne diminue pas continuement jusqu’à zéro). Et une fourmi ne peut pas s’approcher suffisamment d’une flamme si gigantesque à son échelle pour l’alimenter sans se brûler gravement. C’est peut-être pour cela qu’elles n’ont pas « inventé » le feu! Plus sérieusement c’est pour le même genre de raison qu’une goutte d’eau est mortelle pour une fourmi et qu’elles ne se lavent qu’à sec en se frottant les pattes avec de la poussière. Un fois mouillées elles ne peuvent pas vaincre la tension de surface et sortir de la goutte comme on peut le voir dans le film Microcosmos de Francis Perrin.

28 CHAPITRE 2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

Chapitre 3

Le théorème du transport

Marc Rabaud, version du 22 janvier 2016

Sommaire

3.1 Notiondevolumedecontrôle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 3.2 ThéorèmedeLeibnitz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 3.3 Théorème du transport d’une fonction scalaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30 3.4 Conservationdelamasse . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30 3.4.1 Démonstration . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31 3.4.2 Cas particulier d’un fluide incompressible. . . . . . . . . . . . . . . . . . 31 3.5 Théorèmedutransportd’unefonctionvectorielle . . . . . . . . . . . . . . . . 31 3.6 Application au transport de la quantité de mouvement . . . . . . . . . . . . . . 32 3.7 Applicationàlatraînéed’uncylindre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33 3.8 Transportdel’énergie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

Nous allons maintenant présenter quelques théorèmes très puissants et donc utiles pour la méca- nique des fluides. Ils sont basés sur les notions de volume de contrôle et de surface de contrôle et permettent d’écrire des équations de bilan, par exemple pour la masse, la quantité de mouvement ou l’énergie, sans avoir à connaître les équations locales de la mécanique des fluides.

3.1 Notion de volume de contrôle

Un volume de contrôle (VC) est un volume imaginaire limité par une surface de contrôle (SC). Le volume de contrôle peut être un volume fixe dans le référentiel du laboratoire, un volume toujours constitué des mêmes particules fluides, ou un volume ayant un déplacement arbitraire. On parle alors respectivement de volume fixe, volume matériel ou de volume mobile. Dans le cas d’un volume fixe, la vitesse de la surface de contrôle est nulle en tout point ( V ( r, t) = 0 si r ∈ SC). Pour un volume matériel, la vitesse de la surface est égale en tout point à la vitesse locale du fluide ( V ( r, t) = v( r, t) si r ∈ SC).

3.2 Théorème de Leibnitz

Dans de nombreux cas on doit dériver une intégrale d’une fonction de plusieurs variables, dont les bornes dépendent de la variable de dérivation. Dans le cas d’une fonction scalaire dépendant d’une

29

30 CHAPITRE 3. LE THÉORÈME DU TRANSPORT

FIGURE 3.1 – Evolution de l’intégrale en x de la fonction f entre t et t + dt

variable de temps et une d’espace on peut par exemple démontrer l’équation 3.1 : Théorème de Leibnitz :

ddt

∫ b(t)

a(t) f(x, t)dx =

∫ b(t)

a(t)

∂f∂t dx + f[b(t),t] db(t)

dt − f[a(t),t] da(t)

dt (3.1)

On peut se convaincre de la validité de cette relation en observant la figure 3.1.

3.3 Théorème du transport d’une fonction scalaire

On peut ensuite généraliser à trois dimensions d’espace pour une fonction scalaire f (démonstra- tion dans la référence [7] p. 78 à 86 par exemple) :

ddt

∫∫∫V C(t) f( r, t)dτ =

∫∫∫V C(t)

∂f∂t dτ + ∫∫SC(t) f( r, t) V ( r, t) · −→dS.

V ( r, t) est alors la vitesse de déplacement de la surface de contrôle au point considéré. Par exemple si le volume est fixe ce deuxième terme est nul.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, le deuxième terme se transforme en une inté- grale de volume et l’on obtient finalement le Théorème du transport de Reynolds :

ddt

∫∫∫V C(t) f( r, t)dτ =

∫∫∫V C(t)

[∂f∂t + div

()]

f V

dτ. (3.2)

3.4 Conservation de la masse

Grâce au théorème du transport nous allons montrer que la conservation de la masse conduit très rapidement à une équation locale appelée équation de continuité qui s’écrit :

3.5. THÉORÈME DU TRANSPORT D’UNE FONCTION VECTORIELLE 31

∂ρ∂t + div(ρ v)=0 . (3.3) Cette équation a la forme classique d’une loi de conservation. On peut introduire par exemple la quantité de mouvement par unité de volume (ou flux de masse) j = ρ v et faire un parallèle avec la conservation de la charge électrique en électromagnétisme.

3.4.1 Démonstration

La masse dans un volume de contrôle s’écrit : MV C(t) =∫V C(t) ρ( r, t)dτ, où ρ est la masse volumique. Si VC est un volume de contrôle matériel emporté par l’écoulement, alors V = v et s’il y a conservation de la masse (pas de réaction nucléaire par exemple) alors : dMV C/dt = 0. Le théorème du transport de Reynolds nous donne alors pour f = ρ :

dMV C

dt = dt

d[∂ρ∂t + div (ρ v)]

dτ = 0.

On doit donc avoir pour tout VC matériel la relation suivante qui caractérise localement la conserva- tion de la masse (écriture locale) :

∂ρ∂t + div(ρ v)=0 . (3.4)

En développant le terme de divergence, div(ρ v) = ρdiv( v) + v · ∇(ρ) on peut écrire la forme particulaire de la conservation de la masse :DρDt + ρdiv( v)=0 . (3.5)

3.4.2 Cas particulier d’un fluide incompressible.

Pour un fluide incompressible, une particule fluide conserve son volume au cours de son mouve- ment et donc sa masse volumique. On a donc Dρ/Dt = 0. En conséquence, pour un fluide incom- pressible, la conservation de la masse s’écrit simplement :

div( v)=0 . (3.6)

C’est en particulier vrai pour un fluide inhomogène en masse volumique, comme par exemple un fluide stratifié en densité. Le terme ∂ρ/∂t n’est pas forcément nul en un point mais Dρ/Dt l’est.

Dans la suite nous traiterons essentiellement les cas des fluides incompressibles qui satisfont donc l’équation 3.6.

3.5 Théorème du transport d’une fonction vectorielle

Si la fonction du théorème du transport n’est plus scalaire mais vectorielle, on peut appliquer le théorème pour chacune de ses composantes et l’on trouve finalement :

ddt

∫∫∫V C(t) ρ( r, t)dτ =

∫∫∫V C(t)

∫∫∫V C(t) A( r, t)dτ =

∫∫∫V C(t)

∂ ∂t Adτ + ∫∫SC(t) A( r, t)[ V ( r, t) · −→dS].

32 CHAPITRE 3. LE THÉORÈME DU TRANSPORT

Cela dit, le dernier terme n’est plus un scalaire et l’on ne peut donc plus utiliser directement le théorème de Green-Ostrogradsky. Nous verrons plus tard (§ 4.6) qu’il est possible de s’en sortir à condition de définir la notion de divergence d’un tenseur.

3.6 Application au transport de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement par unité de volume s’écrit ρ v. Le théorème du transport d’une quantité vectorielle sur un volume matériel nous permet d’écrire

ddt

∫∫∫V C(t) ρ v dτ =

∫∫∫V C(t)

∂ρ ∂t v

dτ + ∫∫SC(t) ρ v

[ v · −→dS].

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à ce volume de contrôle matériel nous permet d’écrire : ∑forces appliquées = F = d dt P, où cette P équation =∫V C(t) vectorielle ρ v dτ est sur la quantité l’axe xi,

de mouvement totale du volume de contrôle. Si nous projetons

Fi = ddt

∫∫∫V C(t) ρvi dτ =

∫∫∫V C(t)

∂ρvi

∂t dτ + ∫∫SC(t) ρvi

[ v · −→dS]

et nous pouvons appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky pour chaque composante :

Fi =

∫∫∫(V C(t)

∂ρ∂t vi + ρ∂v∂t i

) + div (viρ v)dτ.

Mais div (viρ v) = vidiv(ρ v) + ρ v · ∇(vi). En utilisant de plus la conservation de la masse (Eq. 3.4), il vient :

Fi =

∫∫∫(V C(t)

ρ∂v∂t i

) + ρ v · ∇(vi)dτ.

Soit pour le vecteur F :

F(t) =

∫∫∫V C(t) ρ(∂ v∂t + ( v · ∇) v)

dτ.

L’opérateur ( v· ∇) est le même que celui qui a été introduit dans l’équation 1.4 pour la dérivée par- ticulaire. Finalement en faisant apparaître l’accélération particulaire, la somme des forces appliquées à un volume de contrôle matériel s’écrit :

F(t) =

∫∫∫V C(t) ρD Dt vdτ . (3.7)

Cette équation est vraie même si le fluide est compressible (ρ variable), du moment qu’il y a conservation de la masse.

3.7. APPLICATION À LA TRAÎNÉE D’UN CYLINDRE 33

3.7 Application à la traînée d’un cylindre

A titre d’exercice nous pouvons utiliser cette équation de transport de la quantité de mouvement pour calculer la force de traînée (drag en anglais) D sur un cylindre infini dans un écoulement homo- gène dont la vitesse en amont est U∞ (cf. [30] p. 86). Nous supposerons l’écoulement stationnaire, incompressible et bidimentionnel (2C2D). Nous prendrons un volume de contrôle matériel (se dépla- çant avec le fluide, V = v) limité par la surface du cylindre et un parallélépipède (PQRS) situé assez loin de l’obstacle (figure 3.2). En particulier nous supposerons qu’en aval (sur QR) la pression est revenue à sa valeur en amont P∞ (ce qui suppose que les effets dissipatifs en l’absence d’obstacle sont faibles).

FIGURE 3.2 – Volume de contrôle (PQRS + cylindre) autour d’un obstacle cylindrique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au volume de contrôle nous dit que :

∑ Fappliquées = d dt P= dt

d∫∫∫V C ρ v dτ. Comme forces appliquées sur le fluide à la surface de contrôle nous avons les forces de pression, mais elles s’annulent entre l’amont et l’aval et le haut et le bas si la pression vaut partout P∞, et la force appliquée par le cylindre sur le fluide qui vaut − D.

Le théorème du transport nous donne :

− D = d dt P=

∫∫∫V C

∂(ρ ∂t v)

dτ + ∫∫SC ρ v ( v · −→dS).

Le premier terme du membre de droite est nul car l’écoulement est stationnaire. Projetons sur l’axe des x.

−D =

∫∫ QP ρvx( v·−→dS)+∫∫ RQ ρvx( v·−→dS)+∫∫ SR ρvx( v·−→dS)+∫∫ PS ρvx( v·−→dS)+∫∫cylindre ρvx( v·−→dS). La contribution correspondant à la surface du cylindre est nulle car le produit v · −→dS y est nul, le cylindre étant supposé imperméable.

Dans la suite nous noterons L un élément de longueur fixe dans la direction transverse Oz.

34 CHAPITRE 3. LE THÉORÈME DU TRANSPORT

Sur • • ∫∫ ∫∫ S Q PRSP, ρvρvvx( x( x v v = · · U−→dS) −→dS) ∞, = = sur −2ρbLUρLQR, ∫ −b +b

vx U∞= 22. (y)dy.

U(y). Le Donc :

signe moins venant de la convention d’orientation sortante.

Par contre sur PQ et RS il existe une vitesse transverse vy = 0 mais la vitesse longitudinale est proche • ∫∫ de P QρUU∞ ∞( si v on · −→dS) est assez = loin U∞ du cylindre. On en déduit : s’échappant • ∫∫ R SρUpar ∞( v seconde) · −→dS) à travers = U∞ ∫∫ P Qla ρ( surface v · −→dS) = PQ.

U∞ ̇mPQ où ̇mPQ est le débit massique (masse

surface RS.

∫∫ R Sρ( v · −→dS) = U∞ ̇mRS où ̇mRS est le débit massique à travers la

Les quantités ̇mPQ et ̇mRS ne sont pas connues mais par contre la conservation de la masse permet d’écrire :

̇mPQ + ̇mQR + ̇mRS + ̇mSQ = 0,

Soit

̇mPQ + ̇mRS = − ̇mPS − ̇mQR = L∫ b−b ρ[U∞ − U(y)] dy.

Soit finalement :

−D = −2bLρU∞ 2+ Lρ∫ +b

−b U2(y)dy + U∞

(L∫ b−b ρ[U∞ − U(y)] dy),

et donc :

D = ρL∫ b−b U(y)[U∞ − U(y)] dy . (3.8)

Cette relation permet de calculer la traînée sur un obstacle par une simple mesure expérimentale du profil transverse de vitesse loin en aval, par exemple avec un simple tube de Pitot (voir § 5.4.1 page 47) ou un fil chaud donc sans avoir à instrumenter l’obstacle.

Effet de blocage : On suppose maintenant que l’expérience est faite dans une soufflerie un peu trop étroite. Les surfaces PQ et RS sont donc maintenant les parois de la soufflerie (pas de vitesse normale). La vitesse tangentielle sur ces parois vaut toujours U∞. Montrer que si l’on peut négliger la perte de pression amont/aval dans la soufflerie, on a alors [45] :

D = ρL∫ b−b

[U∞ 2− U2(y)] dy . (3.9)

Pour éviter cet effet de blocage (mauvaise estimation de D à cause des survitesses de part et d’autre de l’objet) on considère en pratique qu’une soufflerie doit avoir une largeur supérieure à 10 fois le diamètre de l’obstacle.

3.8. TRANSPORT DE L’ÉNERGIE 35

3.8 Transport de l’énergie

Considérons un volume de contrôle de fluide. Si on note W  ̇le travail des forces agissant sur ce volume ou sur la surface de contrôle de ce volume, par unité de temps (c’est donc une puissance) et Q ̇l’échange de chaleur correspondant par unité de temps, la thermodynamique nous dit que :

dUdt = W  ̇+ Q  ̇où U est l’énergie interne du volume de fluide considéré,

U =

∫∫∫V C(t) e dτ,

où e est la densité d’énergie, somme de l’énergie potentielle par unité de volume (par exemple ρgz pour l’énergie potentielle macroscopique d’énergie de gravité) et de l’énergie s’écrit alors comme la cinétique par unité de variation locale de densité volume d’énergie 12ρvplus 2. Le bilan le flux d’énergie à travers la surface de contrôle :

W  ̇+ Q  ̇= dt

d∫∫∫V C(t) e( r, t)dτ =

∫∫∫V C(t)

∂e∂t dτ + ∫∫SC(t) e( r, t) V ( r, t) · −→dS

=

(∂e∂t + div(e v))

dτ.

L’expression détaillée du transport de l’énergie et notamment sa dissipation par la viscosité du fluide sera détaillée dans la section 9.6 page 109.

∫∫∫V C(t)

36 CHAPITRE 3. LE THÉORÈME DU TRANSPORT

Chapitre 4

Le tenseur des contraintes

Marc Rabaud, version du 22 janvier 2016

Sommaire

4.1 Notiondetenseurcartésienderang2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37 4.2 Le tenseur des contraintes [σ] (stress tensor). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38 4.3 Symétries du tenseur des contraintes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38 4.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque σ( n) . . . . . . . . . . . 39 4.5 Le tenseur des contraintes visqueuses [σ ] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40 4.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de [σ ] . . . . . . . . . . . 40

4.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2

Nous nous limiterons dans ce cours aux tenseurs cartésiens (décrits dans une base orthonormée fixe) sinon tout est bien plus compliqué !

Pour décrire les variations spatiales d’une fonction scalaire on doit calculer le vecteur gradient. De même pour décrire les variations spatiales d’une fonction vectorielle on peut calculer un tenseur particulier, le tenseur gradient, qui fait apparaître les composantes des vecteurs gradient de chacune de ses composantes.

On définit ainsi par exemple le tenseur des gradients de vitesse [G] par

[G] =



∂v∂x x ∂vy ∂x ∂v∂y x ∂v∂z

x  = [Gij] =

[ ∂vi ∂xj ]∂vy ∂vy ∂y

∂z

.

∂vz ∂x ∂vz ∂x ∂vz ∂z

Ainsi chaque ligne de la matrice est constituée des composantes Pour l’opérateur gradient d’un scalaire on a la relation : dP = ∇P de ∇(v· −→dl.

i).

Pour le tenseur gradient on a la relation :−→dv = [G] · −→dl.

37

38 CHAPITRE 4. LE TENSEUR DES CONTRAINTES

En effet

{−→dv}i = {[G] · −→dl}i = ∂vi

∂x dx + ∂vi

∂y dy + ∂vi

∂z dz = ∇(vi) · −→dl = dvi.

Nous avons ici, avec [G], un exemple de tenseur de rang 2 (il faut 2 indices pour énumérer les coefficients). Un tenseur de rang 1 correspond à un vecteur tandis qu’un tenseur de rang 0 est un scalaire. On peut aussi définir des tenseurs de rangs plus élevés (exemple pour décrire les variations spatiales d’un tenseur de rang 2).

4.2 Le tenseur des contraintes [σ] (stress tensor)

On appelle contrainte la force de contact σ( n) qui s’applique sur une surface unité de normale n (figure 4.2). Si n est le vecteur unitaire, dirigé selon la normale sortante de cette surface (dans la direction du milieu qui applique la force de contact), la force s’exerçant sur une surface dS s’écrit :

−→df = σ( n)dS.

C’est d’où sort la force n) sur de la contact surface appliquée −→dS = dS par n.

le milieu supérieur (là où pointe n) sur le milieu inférieur (là

Par exemple si on regarde les contraintes s’exerçant sur une des faces de surface unité d’un cube (figure 4.1), on a :

σ( ei) = σ1i e1 + σ2i e2 + σ3i e3.

Par exemple σ( e2) est un vecteur ayant trois composantes : σ22 représente la contrainte normale et σ12 Pour et σ32 connaître les deux l’état composantes des contraintes tangentielles.

sur n’importe quelle surface −→dS, nous allons voir qu’il suffit de connaitre σ( e1), σ( e2) et σ( e3). On construit dont le tenseur des contraintes :

[σ]=[σij] =



σ11 σ21 σ12 σ22 σ13

σ23

. σ31 σ32 σ33

Par convention dans σij, l’indice i est le numéro de ligne du tenseur et la direction de la composante de la contrainte considérée et j est le numéro de colonne et la direction de la normale sortante.

4.3 Symétries du tenseur des contraintes

Deux propriétés de symétrie sont importantes pour écrire les contraintes et le tenseur des contraintes :

• Le principe de l’action et de la réaction nous permet d’écrire :

σ( n) = − σ(− n).

En effet la somme des forces appliquées à une surface de masse nulle est forcément nulle.

En conséquence, pour connaître les contraintes appliquées sur un volume cubique infiniment petit il suffit de connaître les contraintes σ( n) sur trois faces contiguës et donc de connaître [σ]. Sur deux faces opposées les contraintes sont égales et opposées au premier ordre.

• Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique : σij = σji.

4.4. CALCUL DE LA CONTRAINTE DANS UNE DIRECTION QUELCONQUE σ( N) 39

x1

x3

σ33

σ13 σ31

σ23 σ32

σ22

σ11

x2 σ21 σ12

FIGURE 4.1 – Convention d’écriture des 9 termes du tenseur des contraintes.

FIGURE 4.2 – Contrainte σ( n) dans une direc- tion quelconque : σ( n)=[σ] · n.

En effet regardons les couples de rotation qui s’exercent sur un cube vis-à-vis de l’axe Oz par exemple :

dΓOz = r ∧ −→df = σyx dSx dx − σxy dSy dy = (σyx − σxy)dτ.

Or le théorème du moment cinétique Donc (σyx −σxy) ∝ ρr2 accélération angulaire infinie.

nous permet ddt22 θ . Lorsque r d’écrire ΓOz = dI d2θ dt2 ∝ ρ dτ r2 ddt22 θ .

→ 0 on doit donc avoir σyx = σxy pour ne pas avoir une

Le même raisonnement pour les autres axes de rotation montrent que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :

σij = σji . (4.1)

Note : Il existe des matériaux élastiques où ce tenseur n’est pas forcement symétrique. Voir par exemple la théorie des frères Cosserat (1909) récemment réutilisée (Merkel et al., Experimental Evi- dence of Rotational Elastic Waves in Granular Photonic Crystals, Phys. Rev. Letters 107, 225502 (2011)).

4.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque σ( n)

Connaissant le tenseur des contraintes [σ] on peut connaître dans un milieu continu la contrainte s’exerçant sur n’importe quelle surface de normale n. En effet on a la relation (figure 4.2) :

σ( n)=[σ] · n = σij nj. (4.2)

deux implicite. i = Nous j fois et 0 avons ici utilisé dans une expression, Par exemple aii sinon.

la ≡ convention ∑le 3i=1 signe aii et de ∑ δii sommation sur = d’Einstein cet indice 3, où δij : dès que des indices apparaissent n’est pas écrit pour simplifier mais il est est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si

On peut vérifier la propriété (4.2) en faisant par exemple n = ei ou bien faire la démonstration complète d’équilibre des forces sur un tétraèdre (cube coupé par la face n, voir Ref. [7] p. 108 ou [29] p. 127).

Exercice : Démontrer la propriété précédente à 2 dimensions.

40 CHAPITRE 4. LE TENSEUR DES CONTRAINTES

4.5 Le tenseur des contraintes visqueuses [σ ]

Considérons le cas d’un fluide au repos, c’est-à-dire en l’absence d’écoulement (hydrostatique). Dans le cadre de la thermodynamique à l’équilibre il y a isotropie des contraintes d’une part et unique- ment le scalaire des contraintes p tel que −→df normales = −p−→dS. d’autre Sans part (pas de contraintes tangentielles). On appelle écoulement on peut donc écrire σij = −pδij.

« pression »

[σ] =



−p 0 0 −p 0

0

 = −p[I] 0 0 −p

où [I] est le tenseur identité aussi appelé tenseur de Kroneker [δ] car [I]=[δij].

On notera que, quelque soit le vecteur n, on a alors σ( n) = [σ] · n = −p[I] · n = −p n. Les contraintes sont donc normales aux surfaces et isotropes dans un fluide au repos (équilibre thermody- namique).

Dans le cas où il existe un écoulement (hors équilibre) on définit le tenseur des contraintes vis- queuses [σ ] par la relation :

[σ] = −p[I]+[σ ]. [σ ] est évidemment le tenseur nul s’il n’y a pas d’écoulement, ou plus généralement s’il n’existe pas d’autres forces que les forces de pression (ce sera le cas des fluides parfaits qui sont supposés sans viscosité). Ce tenseur [σ ] caractérise les forces d’origine visqueuse qui apparaissent sous écoulement. Notons que [σ] ou [σ ] ne décrivent que les forces de contact (ou de surface, forces à courtes portées) et pas des forces de volumes (forces à longues portées) comme la gravité par exemple dont il faudra tenir compte par ailleurs.

4.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de [σ ]

Nous avons démontré (équation 3.7) que pour un volume de contrôle matériel on a la relation :

∑ F = ∫∫∫V C Nous surface allons ∑ Fmaintenant SC. Soit : ∑ décomposer F = ∑ FV les C forces + ∑ Fappliquées SC. Pour ρD Dt les ven dτ.

forces forces de volumiques volume ∑ nous FV C introduirons et en forces les de

forces par unité de masse (donc homogènes à des accélérations) que nous noterons g car souvent ce sera l’accélération de la gravité, mais en principe le terme g pourra représenter n’importe quelle force de volume (force magnétique, électrostatique, force de Laplace, pseudo-forces d’inertie, etc).

∑ FV C =

∫∫∫V C ρ g dτ. Pour les forces de surface nous avons par définition : ∑ FSC =

∮SC σ( n)dS =

∮SC[σ] · n dS =

∮SC[σ] · −→dS. Or σ( n)=[σ] {∮· n = σijnj, donc si on projette l’équation précédente sur l’axe des i, il vient : SC[σ] · −→dS}i =

∮SC Li · −→dS =

∫∫∫V C div( Li)dτ =

∫∫∫V C

∂σij ∂xj dτ.

4.6. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE ET DIVERGENCE DE [σ ] 41

Car c’est le flux d’un vecteur Li de composantes Li santes sont les coefficients d’une ligne du tenseur des = contraintes) (σi1,σi2,σà i3) travers (L pour la surface "ligne" −→dS.

car ses compo-

Donc si on regroupe les forces de volume et les forces de surface, on a pour la composante i :

∑Fi =

∫∫∫V C

[]

ρgi + div( Li)dτ.

Ce que l’on peut encore écrire sous une forme compacte vectorielle :

∑ F =

∫∫∫V C(t)

[ρ g + −→div[σ]]

dτ,

à condition de définir un nouvel opérateur, la divergence d’un tenseur, qui est un vecteur (attention!) dont chaque composante est la divergence du vecteur ligne correspondant :

{En introduisant l’expression [σ] = −p[I]+[σ ] on en déduit que

−→div[σ]}i = ∂σij

∂xj .

{−→div[σ]}i = −∂(pδ∂xj ij)

+ ∂σ ij

∂xj = − ∂x∂p

i + ∂σ ij ∂xj

soit −→div[σ] = − ∇(p) + −→div[σ ].

Finalement en rassemblant tous les termes :

∑ F =

∫∫∫V C ρD Dt vdτ =

∫∫∫V C

[− ∇(p) + ρ g + −→div[σ ]]

dτ,

quel que soit le volume de contrôle matériel et donc au niveau local :

ρD Dt v= − ∇(p) + ρ g + −→div[σ ] . (4.3)

Cette équation est la forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD). Elle est exacte pour tous les fluides, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux du moment qu’ils conservent leur masse. L’étape suivante est d’exprimer la relation constitutive, c’est-à-dire la relation entre le tenseur des contraintes visqueuses [σ ] et le tenseur des gradients de vitesse [G]. Nous établirons cette relation dans le chapitre 9 pour un fluide dit "newtonien". L’équation obtenue portera alors le nom d’équation de Navier-Stokes.

Dans le chapitre 5 nous allons étudier le cas idéal où l’on néglige les contraintes visqueuses ([σ ]=0). On a alors l’équation de la dynamique suivante qui porte le nom d’équation d’Euler :

ρD Dt v= ρ[∂ v∂t + ( v · ∇) v]

= − ∇(p) + ρ g . (4.4)

Cette équation est appelée équation d’Euler du nom du mathématicien suisse du 18`eme siècle qui l’a établie. Cette équation gouverne l’écoulement des fluides sans viscosité que l’on appelle les fluides parfaits par opposition aux fluides réels qui sont visqueux.

42 CHAPITRE 4. LE TENSEUR DES CONTRAINTES

Chapitre 5

Fluides parfaits : équations d’Euler et de Bernoulli

Marc Rabaud, version du 22 janvier 2016

Sommaire

5.1 Equationd’Euler . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43 5.2 EquationdeBernoulli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44 5.3 Généralisation de l’équation de Bernoulli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 5.3.1 Cas d’un fluide barotrope . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 5.3.2 Cas d’un écoulement instationnaire mais irrotationnel . . . . . . . . . . . . 46 5.3.3 EffetCoanda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47 5.4 Quelques applications de l’équation de Bernoulli . . . . . . . . . . . . . . . . . 47 5.4.1 AnémomètreàtubedePitot . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47 5.4.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48 5.4.3 Expérienced’EvangelistaTorricelli(1644) . . . . . . . . . . . . . . . . . 49 5.4.4 Amplification des vagues par le vent . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50 5.4.5 Jetincidentsuruneplaque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51 5.5 Conservation de la circulation (théorème de Kelvin) . . . . . . . . . . . . . . . 51 5.5.1 EffetMagnus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52 5.5.2 Portanced’uneaile . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53 5.6 Paradoxeded’Alembert . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

5.1 Equation d’Euler

Si dans l’équation 4.3, forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique,

ρD vDt = − ∇p + ρ g + −→div[σ ], on néglige les contraintes de surface (autres que la pression) exercées sur le volume de contrôle, alors −→div[σ ] = 0 et l’on obtient l’équation d’Euler, établie par Leonhard EULER (figure 5.1) en 1755 :

43

44 CHAPITRE 5. FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS D’EULER ET DE BERNOULLI

ρD vDt = − ∇p + ρ g . (5.1)

Cette équation est utilisée pour les fluides dits « parfaits », c’est-à-dire pour ceux où l’on peut négliger les effets de la viscosité. Ceci est parfois justifiable loin des parois et si le nombre de Reynolds (que nous définirons au §10.1) de l’écoulement est élevé. L’équation est utilisable même pour des fluides compressibles.

Le problème est bien posé si l’on connaît de plus les conditions aux limites sur v (pas de vitesse normale sur les parois) et sur p et si l’on écrit la conservation de la masse, ∂ρ∂t + div(ρ v)=0.

FIGURE 5.1 – Portrait de Leonhard EULER (1707-1783)

On peut facilement montrer que les écoulements des fluides parfaits sont réversibles en temps. En effet la transformation de v(x,y,z) en − v(x,y,z) et de t en −t laisse l’équation 5.1 invariante. La source d’irréversibilité c’est la dissipation d’énergie par la viscosité, source qui n’existe donc pas pour ces fluides idéalisés. De façon étonnante nous verrons dans le §10.4.1 que l’autre limite des écoulements dominés par les forces visqueuses conduit aussi à des écoulements réversibles.

5.2 Equation de Bernoulli

Un fluide parfait n’ayant par définition pas de viscosité, il ne peut pas dissiper d’énergie. On peut donc à partir de l’équation d’Euler trouver une équation de conservation de l’énergie, appelée équa- tion de Bernoulli.

Démonstration : Voyons d’abord la démonstration classique de cette équation, nous verrons en- suite des généralisations possibles. On suppose donc :

1. un fluide de masse volumique constante (ρ = Cste)

2. un écoulement stationnaire ( ∂∂t = 0) 3. que les forces volumiques dérivent d’un potentiel : g = − ∇(Φg). Dans le cas de la force de

gravité Φg = gz avec l’axe z dirigé vers le haut.

5.2. EQUATION DE BERNOULLI 45

FIGURE 5.2 – Portrait de Daniel Bernoulli (1700-1782) et première page de son traité Hydrodyna- mica publié en 1738. Daniel Bernoulli faisait partie d’une famille de huit mathématiciens éminents (biographie détaillée sur le site http ://www.bibmath.net/bios/index.php3).

Alors l’équation d’Euler (Eq. 5.1) peut s’écrire :

ρ( v · ∇) v = − ∇(p + ρgz)

Nous pouvons alors utiliser une relation du formulaire pour transformer partiellement le membre de gauche en un gradient. On a en effet l’identité :

∇( A · B) = A ∧ −→rot B + B ∧ −→rot A + ( B · ∇) A + ( A · ∇) B

Si on l’écrit pour le vecteur A = B = v on obtient :

( v · ∇) v = ∇(12v2) − v ∧ −→rot v.

L’équation d’Euler s’écrit alors :

∇(pρ + gz + 12v2)

= v ∧ −→rot v . (5.2)

Nous allons montrer que la quantité C = pρ + gz + 12v2, appelée parfois la « charge », reste constante sur une ligne de courant.

Par définition du gradient nous avons :

dC = ∇(C) · −→dl = ( v ∧ −→rot v) · −→dl.

Donc si −→dl est colinéaire à v, ce qui est le cas le long d’une ligne de courant, le terme de droite est nul et dC = 0. Ceci prouve bien que C = Cste sur une ligne de courant (il n’y a pas de « perte de charge »). Toutefois cette constante peut être différente pour chaque ligne de courant.

Sur une ligne de courant l’équation de Bernoulli (figure 5.2) s’écrit alors :

p + ρgz + 12ρv2 = Cste. (5.3)

46 CHAPITRE 5. FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS D’EULER ET DE BERNOULLI

Le même raisonnement permet de montrer que C est aussi une constante sur une ligne de vorticité (on appelle vorticité la quantité ω = −→rot v).

Si l’écoulement est irrotationnel (aussi appelé écoulement potentiel) dans un certain domaine d’espace, c’est-à-dire si −→rot v = 0 alors la constante C est la même sur toutes les lignes de courant traversant dans ce domaine.

— Le terme p est appelé pression statique (ou locale). — Le terme ρg h est appelé pression hydrostatique. — Le terme 12ρv2 est appelé pression dynamique. — p+ρg z+ 12ρv2 est appelé pression totale ou pression de stagnation ou encore pression d’arrêt. En effet la charge étant constante sur une ligne de courant, cette pression totale est aussi la pression que l’on mesure en un point où la vitesse est nulle.

5.3 Généralisation de l’équation de Bernoulli

5.3.1 Cas d’un fluide barotrope

Si le fluide est compressible, mais que la masse volumique ρ en un point de l’écoulement ne dépend que de la pression p et pas de la température par exemple, les isobares sont aussi des isostères (iso masse volumique). On dit alors que le fluide est barotrope (cas d’une transformation isotherme ou adiabatique pour un gaz parfait par exemple). Dans ce cas le terme ∇(p)

ρ peut se mettre sous la forme d’un gradient :

∇(p)

ρ = ∇(∫ dp

ρ(p)). En effet par définition du gradient on a : ∇(∫ dp

ρ(p))

· −→dl = d(∫ dp

ρ(p))

= dp

ρ(p) = ∇p

ρ(p) · −→dl. Si de plus l’écoulement est stationnaire et si les forces volumiques dérivent d’un potentiel, la charge peut se mettre sous la forme : C = ∫ dp

ρ(p) + gz + 12v2.

5.3.2 Cas d’un écoulement instationnaire mais irrotationnel

Si l’écoulement est instationnaire, incompressible et que les forces volumiques dérivent d’un po- tentiel, l’équation d’Euler peut se mettre sous la forme :

∂ v∂t + ∇(pρ + gz + 12v2)

= v ∧ −→rot v.

Si l’écoulement est irrotationnel (−→rot v = 0), v dérive d’un potentiel (d’où le nom d’écoulement potentiel aussi utilisé) et l’on peut écrire v = ∇(Φ) et donc ∂ v∂t = ∇∂Φ∂t . On peut alors généraliser l’équation de Bernoulli à chaque instant par :

C(t) = ∂Φ∂t + pρ + gz + 12v2.

La charge C(t) ne dépend pas de la position mais uniquement du temps. A chaque instant C = Cste dans toute la zone irrotationnelle. On peut d’ailleurs faire disparaître cette constante en redéfinissant le potentiel de vitesse comme Φ = Φ − ∫ t0 C(t)dt. En effet ces deux potentiels on le même gradient.

5.4. QUELQUES APPLICATIONS DE L’ÉQUATION DE BERNOULLI 47

5.3.3 Effet Coanda

Réécrivons l’équation d’Euler pour un écoulement stationnaire en négligeant les effets de gravité :

ρD vDt = ρ( v · ∇) v = − ∇(p). Si les lignes de courant sont courbées on peut utiliser le référentiel tangent et l’on note n le vecteur unitaire dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré et t le vecteur tangent. L’accélération s’écrit alors comme la somme d’une accélération tangente dvdt (dérivée du module de la vitesse) et d’une accélération centripète v2R (R est le rayon de courbure local de la trajectoire) :

D vDt = dvdt t + v2R n. L’équilibre de la force centrifuge par la composante radiale du gradient de pression s’écrit donc :

ρv2R = ∂p∂r. C’est ce que l’on appelle l’effet « Coanda ». La pression augmente lorsque on s’éloigne du centre de courbure des lignes de courant. On peut utiliser cette relation pour expliquer la figure 5.3 où une balle légère est maintenue par une force dirigée vers le jet courbé. Cette force est aussi très nettement mesurable si l’on approche le dos d’une cuillère d’un filet d’eau sous un robinet. Cet effet Coanda n’est pas sans relation avec l’effet de portance sur une aile décrits aux §5.5.1 et 5.5.2.

A B P0

FIGURE 5.4 – Anémomètre à tube de Pitot

FIGURE 5.3 – Effet Coanda

5.4 Quelques applications de l’équation de Bernoulli

5.4.1 Anémomètre à tube de Pitot

Cet appareil, inventé par Henri PITOT en 1732 et toujours utilisé aujourd’hui notamment dans l’aviation, permet à peu de frais de mesurer la vitesse moyenne d’un écoulement stationnaire ou variant lentement (figure 5.4).

48 CHAPITRE 5. FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS D’EULER ET DE BERNOULLI

Supposons un écoulement uniforme de vitesse U∞ et à la pression P∞ loin de l’obstacle pour un fluide de masse volumique ρ. Le tube de Pitot étant profilé il perturbe peu l’écoulement. Une fois les niveaux des liquides équilibrés dans le manomètre à tube (on peut aussi utiliser d’autres types de manomètres) il n’y a plus d’écoulement à l’intérieur du tube et les lois de l’hydrostatique s’appliquent PA − PB = (ρm − ρ)g hm où ρm est la masse volumique du liquide manométrique (ρm > ρ).

Sur la ligne de courant venant de l’infini et passant par le point de stagnation A on a UA = 0 soit :

P∞ + 12ρU∞ 2= PA Cette même ligne de courant après A se prolonge le long du tube et passe au point B, donc on a aussi :

PB + 12ρUB 2= PA = P∞ + 12ρU∞2. On supposera que la vitesse en B est déjà revenue à sa valeur à l’infini, UB = U∞, alors cette équation nous montre que la pression en B est aussi égale à la pression P∞ (on a négligé les effets de gravité dans Bernoulli).

La différence entre la pression de stagnation mesurée en A et la pression à la paroi mesurée en B est donc proportionnelle au carré de la vitesse : ∆P = PA − PB = 12ρU∞2, soit finalement :

U∞ =

√2∆Pρ =

√2(ρρ m− 1)ghm.

Le tube de Pitot fonctionne également si le fluide n’est pas vraiment parfait à condition d’avoir un écoulement rapide (nombre de Reynolds élevé) pour que l’épaisseur de la couche limite soit encore faible au voisinage du point B. Nous verrons dans le chapitre 11 que dans ce cas le gradient de pression transverse à la couche limite est négligeable et que l’on peut bien confondre PB et P∞.

Les tubes de Pitot sont encore couramment utilisés (on en a beaucoup parlé dans la presse suite à l’accident du vol Rio-Paris en 2009). Ils mesurent bien la pression en statique, par contre ils ont une mauvaise réponse temporelle à cause du comportement de filtre passe-bas de l’écoulement dans les petits trous ou les petits tubes.

5.4.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi

Considérons une conduite dont la section est localement et progressivement diminuée (figure 5.5). Une mesure de la chute de pression entre l’entrée du tube et l’endroit où la section est la plus faible va permettre, à condition de connaître les sections, de calculer le débit passant dans la conduite, et ceci sans pièce mobile. L’effet Venturi a été étudié par Giovanni Battista Venturi à la fin du 18e. Donc En si régime on suppose stationnaire de plus p que + 12la ρUvitesse 2 est constant est uniforme sur les dans lignes toute de section courant de si la on conduite néglige (ce la gravité. qui est réaliste pour un fluide parfait), on a, en appelant respectivement A, B et C, les trois points de mesure :

PA + 12ρUA 2= PB + 12ρUB 2= PC + 12ρUC 2Comme de plus on conserve le débit volumique Q = QA = QB = QC soit UA SA = UB SB = UC SC, et donc on peut relier la différence de pression entre A et B à la vitesse et donc au débit Q :

PA − PB = 12ρ(UB 2− UA2) = 12ρUA

2[(SASB)2

]

− 1

5.4. QUELQUES APPLICATIONS DE L’ÉQUATION DE BERNOULLI 49

soit

Q = SA√2(PA − PB)

ρ

( SB

2SA 2− SB2). La mesure de PA − PB et la connaissance de SA, SB, et de la masse volumique ρ du fluide en écoulement permettent de déterminer le débit.

A B C

FIGURE 5.6 – Démonstration de l’effet Venturi. D’après [50] p. 120. PA > PC > PB.

Parfois la pression PB est tellement faible au niveau de la contraction que l’on y observe des bulles de cavitation (dégagement de vapeur au sein du liquide si PB devient inférieur à la pression de vapeur saturante du liquide).

Cet effet Venturi, et plus précisément la dépression générée au point B (figure 5.5 ), est aussi utilisé dans les trompes à eau pour abaisser la pression d’un gaz, ou pour projeter de la peinture avec un aérographe.

Exercice : Refaire l’étude du débitmètre de Venturi pour un fluide compressible. Notons que sur la figure 5.6, la pression en C est plus faible que la pression en A, ce qui ne devrait pas être le cas pour un fluide parfait. Ceci est due aux pertes de charges dans le rétrécissement, pertes de charge qui n’existent que parce que le fluide réel n’est pas parfait et qu’il y a dissipation d’énergie. Une autre cause possible est que le rétrécissement est un peu trop brusque et qu’il se forme un jet en sortie (l’écoulement n’est alors plus homogène dans la section en C).

L’artériosclérose est une maladie où le diamètre des artères est localement diminué par des dépôts de graisse. L’effet Venturi explique en partie l’évolution grave de cette maladie.

5.4.3 Expérience d’Evangelista Torricelli (1644)

L’expérience de Torricelli consiste à vider un récipient par un petit trou situé à la profondeur h sous la surface du liquide (figure 5.7). Si le récipient est large comparé à la taille du trou on peut

FIGURE 5.5 – Débitmètre de Venturi

50 CHAPITRE 5. FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS D’EULER ET DE BERNOULLI

négliger le caractère instationnaire de l’écoulement (h diminue doucement) et sur une ligne de courant reliant un point de la surface à un point dans le trou on a : Patm + ρgh +0= Patm +0+ 12ρU2 soit : U = √2g h.

Une clepsydre (récipient rempli d’eau utilisé il y a bien longtemps pour mesurer les durées) est basée sur ce principe. Elle se vide de plus en plus lentement lorsque h diminue, contrairement à un sablier dont le sable s’écoule lui à vitesse constante.

Patm

v = 0 U

Patm

FIGURE 5.7 – Expérience de Torricelli

Exercice : En appliquant la conservation du débit, trouver l’équation régissant h(t) pour un ré- cipient cylindrique de section S et pour un trou de section s. Montrer en particulier que le temps de vidange vaut Ss

h

√ 2h0g , où h0 est la hauteur initiale de remplissage au-dessus du trou. Quelle doit-être la forme du récipient S(h) pour que l’écoulement se fasse à vitesse constante ?

5.4.4 Amplification des vagues par le vent

L’apparition des vagues sous l’action du vent peut se comprendre comme une instabilité (l’in- stabilité de Kelvin-Helmholtz, voir § 16.4 page 198) dont le mécanisme déstabilisant s’explique par l’équation de Bernoulli. En effet si on considère une interface air-eau légèrement déformée et que l’on décrit les lignes de courant dans le référentiel qui se déplace avec les vagues (afin de pourvoir appli- quer l’équation de Bernoulli stationnaire), le vent est accéléré au-dessus des crêtes, la pression y est donc plus faible. De même la vitesse du vent décroît au niveau des creux, la pression y est plus forte. Le même raisonnement peut être fait dans l’eau qui se propage dans l’autre direction. En conséquence l’amplitude de toute déformation initiale de l’interface croît au cours du temps. Ce sont les forces de gravité et de tension de surface qui vont limiter l’amplitude des vagues mais surtout expliquer l’exis- tence d’un seuil en vitesse pour cette instabilité, c’est-à-dire une vitesse du vent minimale pour que en principe les premières rides puissent apparaitre. On sait depuis Kelvin que la réalité est plus complexe car le seuil trouvé ne correspond pas à la réalité. La turbulence de l’air est un paramètre important à prendre en compte.

5.5. CONSERVATION DE LA CIRCULATION (THÉORÈME DE KELVIN) 51

FIGURE 5.8 – Schéma du déplacement pendant dt de l’élément du contour dl.

5.4.5 Jet incident sur une plaque

Exercice : Calculer la force appliquée par un jet d’eau (bidimensionnel et horizontal), d’épaisseur h rencontrant une plaque plane inclinée d’un angle α vis-à-vis de la verticale. Montrer que la force par unité de largeur perpendiculaire à la plaque F⊥ vaut :

F⊥ = ρU2 h cosα.

Que vaut la force tangentielle F//?

5.5 Conservation de la circulation (théorème de Kelvin)

l’écoulement, Γ = La ∫∫S circulation s’écrit du : Γ vecteur = ∮Cm vitesse v · −→dl sur un contour Cm fermé matériel, c’est-à-dire emporté par −→rot v · −→dS = Nous allons étudier ∫∫S l’évolution ω · −→dS, . Par application du théorème de Stokes, on peut aussi l’écrire :

où S est n’importe quelle de cette circulation le surface long portée par ce contour matériel.

d’un contour matériel emporté par l’écoulement. En utilisant le théorème de Leibnitz (Equ. 3.1) et en s’inspirant du théorème du transport on peut écrire :

DΓDt =

∮∮Cm

Cm v · DDt −→dl .

Dans le premier terme du membre de droite se trouve l’accélération particulaire des particules fluides sur un contour fixe tandis que −→dl(t Pour + dt) le = deuxième −→dl(t) + terme, vBdt On peut donc écrire v · nulle.dans le dessinons D− Dt −→dl vAdt. = Or v · deuxième −→dv un vB = petit = 12d(vvA élément terme 2+ ). −→dv, L’intégrale apparaît soit −→dl D vDt · −→dl +

le déplacement du contour. aux finalement instants DDt t −→dl et = t + −→dv.

dt (figure 5.8). On a sur un contour fermé de ce terme est

Pour le premier terme en utilisant l’équation d’Euler on a D Dt v= −1ρ ∇p + g.

52 CHAPITRE 5. FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS D’EULER ET DE BERNOULLI

Si la masse volumique est constante (ou si le fluide est barotrope), la circulation du gradient de pression est nulle. Si de plus les forces de volume dérivent d’un potentiel, la dérivée particulaire de la circulation s’écrit :

DΓDt = 0. Enoncé du théorème de Kelvin (1869) : Sous la condition de satisfaire les conditions suivantes : — fluide parfait (ν = 0) — forces de volume dérivant d’un potentiel — densité constante (ou alors fluide barotrope), la circulation du vecteur vitesse autour de n’importe quelle boucle fermée et entraînée par le fluide est une quantité qui se conserve au cours du mouvement. Ce que l’on peut écrire :

DΓDt = 0 .

Une conséquence du théorème de Kelvin : la persistance de l’irrotationnalité. Si dans un do- maine de l’espace simplement connexe l’écoulement est irrotationnel, la circulation autour de n’im- porte quel contour contenu dans ce domaine sera nulle. Cette propriété est conservée par advection par l’écoulement. Une zone irrotationnelle restera donc irrotationnelle. Il n’y a que dans les couches li- mites visqueuses que peut naître de la vorticité. Ceci est cohérent avec le fait que pour faire tourner sur elles-même des particules fluides et donc leur donner de la vorticité il faut l’action des contraintes visqueuses.

5.5.1 Effet Magnus

Le nom d’effet Magnus vient du nom du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802- 1870) qui a décrit ce phénomène. Robins avait en fait mis en évidence ce phénomène près d’un siècle plus tôt (1742). Dans de nombreux sports on « lifte » ou on « brosse » les balles, c’est-à-dire qu’on leur donne une rotation sur elles-mêmes qui a pour effet de courber leur trajectoire. Là encore cet effet peut être décrit par le théorème de Bernoulli.

Ω U

FL

FIGURE 5.9 – Exemple de portance acquise par effet Magnus d’une balle tournant sur elle-même.

Prenons une balle tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire Ω (figure 5.9). Dans le réfé- rentiel du centre de masse de cette balle il existe un écoulement d’air de gauche à droite d’intensité U. A cause de l’existence de couches limites au voisinage de la balle (zones où la viscosité du fluide se fait sentir, voir § 11 page 141) et de la condition de non-glissement du fluide au voisinage de la

5.6. PARADOXE DE D’ALEMBERT 53

surface de la balle (§ 10.2.1 page 118) le fluide va aller plus vite que U juste au-dessous de la balle (les vitesses s’ajoutent) et légèrement moins vite juste au-dessus (les vitesses se soustraient). La re- lation de Bernoulli nous dit alors que la pression va être un peu plus forte au-dessus qu’au-dessous de la balle avec pour conséquence une force dirigée ici de haut en bas (cas d’une balle liftée) appelée portance (lift en anglais) FL. Ici nous avons une portance négative qui fait plonger la balle.

On peut montrer que FL ∝ ρ U ∧ Ω. Une autre façon de décrire les choses est que, comme nous le verrons circulation dans du l’étude vecteur de vitesse la portance Γ = ∮ sur v · une −→dl aile d’avion, il existe une portance parce qu’apparaît une

autour de l’objet. Une autre application classique de l’effet Magnus est la propulsion par cylindres tournants ima- ginée par Anton FLETTNER et pour la première fois utilisée sur le Baden Baden en 1926. L’idée a ensuite été perfectionnée pour l’Alcyone, bateau de J.-Y. COUSTEAU. Dans ce cas la dissymétrie de l’écoulement est contrôlée par aspiration asymétrique des couches limites plutôt que par la rotation du cylindre.

5.5.2 Portance d’une aile

Les deux figures suivantes (figures 5.10 et 5.11) représentent respectivement l’écoulement et les forces locales agissant sur une voile mince ou sur une aile portante sous faible incidence. L’équation de Bernoulli permet d’évaluer assez simplement la portance sur une telle aile (pour plus de détail, voir le chapitre 13).

Si on compare deux lignes de courant passant respectivement juste au-dessous (zone 1) et juste au-dessus (zone 2) d’une aile de longueur L et d’envergure a, on peut écrire :

P∞ + 12ρU∞ 2= P1 + 12ρU1 2et P∞ + 12ρU∞ 2= P2 + 12ρU2 2soit :

P1 − P2 = 12ρ(U2 2− U12) = 12ρ(U2 − U1)(U2 + U1). Au premier ordre on peut écrire U2 + U1 ≈ 2U∞ et la portance FL peut s’écrire :

FL ≈

[∫ L0 ∫ L]

a(P1 − P2)dl ≈ aρU∞

(U2 − U1)dl= −aρU∞ Γ 0 où Γ est la circulation autour de l’aile calculée dans le sens trigonométrique. Ce calcul n’est qu’une estimation mais le résultat trouvé est exact comme nous le verrons au chapitre 13 page 159.

Notons que dans ce type d’approche, basée sur l’équation d’Euler et la conservation de l’énergie, il n’existe pas de force de traînée puisqu’il n’y a pas de viscosité (voir § 5.6). En effet sans viscosité il n’existe pas de vorticité, ni de couche limite, ni de décollement de couche limite, un phénomène pourtant capital pour expliquer la traînée et l’éventuel décrochage d’une aile.

5.6 Paradoxe de d’Alembert

On nomme paradoxe de d’Alembert le fait que dans le cadre de l’équation d’Euler il n’existe pas de force de traînée sur un obstacle (force dans le sens de l’écoulement appliqué par le fluide sur l’obstacle) pour un écoulement stationnaire, bien qu’on puisse calculer une portance. Les forces de

54 CHAPITRE 5. FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS D’EULER ET DE BERNOULLI

FIGURE 5.10 – Portance sur une aile en inci- dence. La portance exercée par l’air sur l’aile est égale et opposée à l’action de l’aile déviant l’air vers le bas.

FIGURE 5.11 – Répartition réelle de pression autour d’une aile.

traînée existent pourtant bien dans la réalité, mais elles sont dues à l’existence de couches limites (éventuellement décollées) qui changent la distribution de pression autour de l’obstacle par rapport au cas du fluide parfait.

Dans le cas d’une aile, le flux de quantité de mouvement est défléchi ce qui donne une portance, par contre il n’y a pas de perte de quantité de mouvement horizontale ce qui correspondrait à une force de traînée et donc à une dissipation d’énergie.

Notons toutefois qu’il existe une force de traînée en régime instationnaire, qui correspond à la nécessaire variation de l’énergie cinétique des particules fluides. Cette force est appelée la force de masse ajoutée. Par exemple pour une sphère accélérée on trouve D volume de la sphère.

= − 12ρV0 d V dt (t)

, où Vo est le

Même en régime stationnaire il peut quand même exister une traînée en fluide parfait en présence d’ondes (sonores, de surface ou autres). En effet ces ondes peuvent rayonner de l’énergie vers l’infini. C’est le cas de la traînée de vague ressentie par un obstacle se déplaçant à la surface de l’eau (voir § 7.2.6 page 80).

Exercice : On considère un obstacle symétrique admettant des lignes de courant symétriques. En déduire que, dans le cadre de l’équation d’Euler stationnaire, la pression présente la même symétrie et que donc la traînée est nulle. On peut généraliser cette démonstration à des corps non-symétriques et ainsi démontrer le paradoxe de D’Alembert (voir [38] page 240 ou [4] page 404).

Chapitre 6

La tension de surface

Marc Rabaud, version du 6 février 2016

Sommaire

6.1 Originemicroscopique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56 6.2 LaloideLaplace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58 6.3 Angle de mouillage macroscopique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60 6.3.1 Loid’équilibred’Young-Dupré . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61 6.3.2 Hystérésisdel’angledecontact . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62 6.4 Effet de la gravité et longueur capillaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62 6.5 La mesure de la tension superficielle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 6.5.1 LaloideJurin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 6.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64 6.5.3 Méthode de la goutte pendante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65 6.5.4 Méthode de la goutte tournante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66 6.6 Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni) . . . . . . . 66 6.7 Lestensioactifs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66 6.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains? . . . . . . . . . . . . . 66 6.7.2 Comment expliquer la stabilité des membranes de savon contrairement aux

membranesd’eau? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67 6.8 Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface . . . . 67

Lorsque des corps en contact sont immiscibles, cela signifie qu’il existe à leur interface des forces qui empêchent les molécules de chacune des phases (solide, liquide ou gazeuse) de se mélanger sous l’action de l’agitation thermique. Ces forces sont appelés des forces interfaciales, ou de tension su- perficielle ou aussi des forces capillaires dans le cas des liquides. Au contraire, dans le cas des corps miscibles ces forces sont nulles ou du moins insuffisantes pour empêcher le mélange à temps long : c’est le cas des gaz qui sont toujours miscibles ou de deux liquides si leur mélange est possible.

Aux petites échelles ces forces de tension aux interfaces ne peuvent souvent plus être négligées devant les autres forces, la gravité par exemple. Ce sont elles par exemple qui expliquent comment les araignées d’eau marchent sur l’eau (figure 6.1) ou pourquoi nos cheveux sont collés entre eux en sortant de l’eau (figure 6.2).

55

56 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

FIGURE 6.2 – Effet des forces capillaires sur FIGURE 6.1 – Un gerris posé à la surface d’un

un pinceau sec, immergé ou mouillé. (D’après étang.

[53], p. 12).

6.1 Origine microscopique

Les phénomènes de tension de surface, aussi appelés phénomènes capillaires ou interfaciaux trouvent leur origine dans les forces intermoléculaires attractives qui existent dans toute phase conden- sée de la matière. Une molécule loin de toute surface a de nombreuses voisines (entre 6 et 10 premières voisines) donc une forte énergie d’interaction. Par contre une molécule en surface a moitié moins de voisines de son espèce, donc moitié moins d’énergie d’interaction (figure 6.3). Tout se passe comme s’il avait fallu casser un certain nombre de liaisons, ce qui a un coût en énergie. L’énergie ES pour fabriquer une surface S est égale à ce coût par molécule multiplié par le nombre de molécules en surface (lui-même proportionnel à la surface S). On peut donc écrire :

ES = γ S. (6.1)

Le coefficient de proportionnalité γ s’appelle la tension de surface ou tension interfaciale. C’est une énergie par unité de surface (grandeur intensive) mais, comme nous le verrons, ce coefficient peut aussi être interprété comme une force par unité de longueur. La tension de surface s’exprime en J/m2 ou en N/m.

Surface libre

Liquide

FIGURE 6.3 – Différence entre les forces d’in- teraction entre molécules à la surface et au sein d’un liquide.

FIGURE 6.4 – Effet des forces capillaires sur le whisky du capitaine Haddock dans On a marché sur la lune.

6.1. ORIGINE MICROSCOPIQUE 57

γair−eau 72mN/m

γHg−air 490mN/m

γ ́ethanol−air 22mN/m

γ ́ethanol−huilesilicone 0,7mN/m

TABLE 6.1 – Quelques valeurs de tension interfaciale à 20◦C

Le cas de l’eau : l’eau très pure a une tension de surface relativement forte (environ 72 mN/m) comparativement à d’autres liquides usuels à cause de son caractère polaire et des liaisons hydrogènes. Mais c’est en réalité une valeur asymptotique car, dès que l’eau est en contact avec l’atmosphère, de nombreuses particules vont se déposer progressivement à la surface et en quelques minutes ou heures la tension de surface vaut plutôt de l’ordre de 50 mN/m. C’est aussi l’ordre de grandeur de la tension de surface que l’on mesure pour l’eau du robinet.

Afin de minimiser son énergie ES, un fluide va avoir tendance à minimiser sa surface et donc à prendre une forme sphérique en l’absence d’autres contraintes comme la gravité (figure 6.4 ou les vi- déos https://www.youtube.com/watch?v=TLbhrMCM4\_0 et https://www.youtube.com/watch? v=bKk\_7NIKY3Y prises dans la Station Spatiale Internationale).

FIGURE 6.6 – La caténoïde, surface minimale FIGURE 6.5 – Exemple de surface minimale

portée par deux anneaux [53] . portée par une hélice et son axe [53].

La figure 6.7 illustre le fait qu’il existe une force qui tend à minimiser la surface de la membrane de savon et qui conduit à une surface dont l’aire est minimale. En tirant avec une force f sur la ficelle centrale on fournit un travail dW = f dl = γ dS et l’on peut donc augmenter la surface. Cette action est réversible.

Une mince membrane de savon (pour laquelle on peut négliger l’effet de la gravité) portée par un contour va réaliser une surface minimale, c’est-à-dire une surface portée par un contour dont l’aire est la plus La faible surface possible d’un liquide (figures est 6.5 donc et 6.6).

un lieu de contrainte. Tout segment −→dl dans le plan de cette

58 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

surface est soumis à deux forces égales et opposées si la surface est à l’équilibre, dirigées elle aussi dans le plan de la membrane, et perpendiculairement à l’élément de longueur considéré :

−→df = ±γ

( n ∧ −→dl). (6.2)

où n représente la normale à la surface. Une description détaillée au niveau microscopique de pourquoi cette force est parallèle à la surface est donnée dans la Ref. [36]. On peut facilement rompre cet équilibre en diminuant localement la tension de surface, par exemple si le liquide est de l’eau en touchant la surface avec du savon ce qui à pour effet de diminuer localement la tension de surface (voir § 6.7). L’équilibre est alors rompu et le fluide en surface se déplace brutalement radialement vers la zone de plus forte tension de surface.

FIGURE 6.7 – Démonstration de l’existence des forces capillaires. Les deux bouts de la ficelle sont en forme d’arcs de cercle. Pourquoi ?

Exercice : On s’intéresse à l’ouverture rapide d’un trou dans une membrane de savon horizontale sous l’action de la tension de surface. En supposant que toute la masse se retrouve dans un bourrelet montrer qu’après un transitoire ce bourrelet avance ensuite à vitesse constante dite de Taylor-Culick que l’on calculera. Ref. : Culick, F.E.C. 1960 Comment on a ruptured soap film. J. Appl. Phys. 31 1128-1129.

6.2 La loi de Laplace

Si une surface est courbée, les contraintes de traction existant sur la surface ont une composante non nulle dans la direction normale à la surface et orientée vers le centre de courbure, c’est-à-dire du coté concave de la surface. A l’équilibre, cette force normale est compensée par une pression plus forte du côté intérieur que du côté extérieur. Prenons l’exemple d’une goutte sphérique que nous allons couper en deux par la pensée (figure 6.8). La force dirigée vers le haut due à la surpression à l’intérieur de la goutte, ∆P πR2, doit être égale à la somme des forces de tension de surface sur l’équateur γ 2πR. Soit pour une goutte sphérique :

∆p = pint − pext = 2 γR .

Dans le cas général on montre que la loi de Laplace, formulée pour la première fois en 1806 par Pierre-Simon de Laplace, s’écrit en chaque point d’une surface courbée :

6.2. LA LOI DE LAPLACE 59

FIGURE 6.8 – Illustration de l’effet de la sur- pression de Laplace ∆p sur une goutte coupée en deux par la pensée.

FIGURE 6.9 – Notion de rayon de courbure, d’après [29] p. 46.

pi − pj = γ

]

. (6.3)

où R et R” sont les deux rayons de courbure de la surface en ce point, comptés positivement lorsque leur centre de courbure se trouve du coté i. En effet, pour tout point d’une surface lisse, on peut définir la normale et donc des plans contenant cette normale. Chacun de ces plans coupe la surface selon une courbe dont on peut déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure (figure 6.9).Démonstration : La figure 6.10 représente le plan Oxy contenant la normale n et un vecteur tangent t en un point M de l’interface entre deux fluides. Dans ce plan l’élément de surface a pour longueur ds. O est le centre de courbure. La force de tension superficielle en M vaut par élément de longueur dz dans la direction transverse : F(s) = γdz t. A l’équilibre cette force à le même module en s + ds mais pas la même direction :

F(s + ds) = F(s) + γdz −→dt.

Or

[ 1R + R 1existe deuxième par −→dθ dtune aussi = force − contribution n un et de rayon ds surpression = de R à dθ, courbure la force où ∆p(dzds) R normale R = OM dans n ce est −→dF le qui plan le = donne rayon −γdz perpendiculaire de finalement R dscourbure n. A l’équilibre l’équation à en Oxy M. Donc et cette contenant 6.3.

−→dF force = −γdz n, est il compensée existe R dsn. S’il une

Pour une courbe y = f(x), la courbure (inverse du rayon de courbure) qui caractérise la rotation du vecteur tangent lorsqu’on se déplace sur la courbe est donnée par la relation :

C = 1/R = (1 + y

y 2)3/2.

Les deux rayons R et R doivent être mesurés dans deux plans perpendiculaires [4]. On montre que la somme de ces rayons de courbure, appelée courbure géométrique ou courbure moyenne C = C + C = (1/R + 1/R ) est indépendante du choix des deux plans perpendiculaires, c’est un invariant de la surface.

60 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

y

t(s)

n M dθ

R’

0

x

FIGURE 6.10 – Plan perpendiculaire à l’interface c’est-à-dire contenant n.

Notons qu’une surface peut avoir une courbure nulle, c’est le cas d’un point-selle (aussi appelé point-col). En effet les rayons de courbure sont des quantités algébriques, comptées positives si le centre de courbure est situé du côté identifié par la lettre i. Dans le cas du point-selle les pressions de chaque côté de la surface sont égales. Les figures 6.5 et 6.6 sont des exemples de surface de courbure nulle en tout point et donc de surface minimale.

En conséquence de la loi de Laplace, plus une goutte est petite plus le fluide à l’intérieur est à une pression élevée. Les petites bulles sont donc bien sphériques et peu déformables. Attention, pour les bulles de savon, la tension de surface agit des deux côtés des membranes (il y a en effet deux interfaces eau-gaz). Il apparaît donc un facteur 2 dans la relation de Laplace : ∆P = 4γ/R. Cette surpression dans les petites bulles a de nombreuses conséquences, par exemple pour l’initiation de la cavitation ou de l’ébullition ou pour la formation de brouillards.

6.3 Angle de mouillage macroscopique

Dans de nombreuses situations, trois phases, solide-liquide-gaz par exemple, sont présentes et leur frontière est une ligne nommée ligne triple. Si la ligne triple est stable, les trois forces interfaciales doivent s’équilibrer.

Prenons le cas d’une goutte liquide posée sur un substrat et notons θ l’angle de contact mesuré dans la phase liquide (figures 6.11 et 6.12). La goutte peut s’étaler plus ou moins sur le support, on dit qu’on est en situation mouillante si θ est faible, en situation de mouillage partiel, ou encore en situation non mouillante si θ est élevé (90◦ <θ< 180◦).

Un exemple historique de mouillage total est l’expérience de Benjamin Franklin qui en 1750 versa une cuillère d’huile d’olive sur un étang dans les environs de Londres. Il observa une disparition des rides crées par le vent sur une surface importante de l’étang et Lord Rayleigh put, 100 ans plus tard, déduire de cette expérience une estimation très raisonnable de la dimension typique des molécules.

L’angle θ est appelé l’angle de mouillage apparent ou angle macroscopique. En effet il n’est pas forcément défini au niveau microscopique (il peut par exemple exister un film précurseur [16] dont l’épaisseur de l’ordre de quelques molécules est contrôlé par la pression de disjonction).

6.3. ANGLE DE MOUILLAGE MACROSCOPIQUE 61

FIGURE 6.11 – Liquide partiellement mouillant une paroi et de moins en moins mouillant de (a) à (c).

FIGURE 6.12 – Goutte d’eau sur une surface ci- rée.

6.3.1 Loi d’équilibre d’Young-Dupré

Pour une goutte posée sur une surface solide indéformable, l’équilibre des forces sur une longueur dl de la ligne triple de contact et dans le plan tangent à la surface s’écrit (figure 6.13) :

∑df = γSL dl + γLG cosθ dl − γGS dl = 0,

Où γij est la tension de surface entre la phase i et j. Soit :

γSL + γLG cosθ = γGS. (6.4)

Solide

1mm

z 1 (x) z 12 (x) Figure 4.3: (a) Lens upper cap, (b) upper meniscus zone and (c) lower meniscus zone. (d) Representation of lens FIGURE 6.14 – Même condition d’équilibre pour une goutte posée sur un autre liquide.

C’est la loi d’Young-Dupré. La référence [36] présente en détail les subtilités au niveau microsco- pique de l’équilibre des forces au niveau de la ligne triple.

Comme

cosθ = γSG γ− LG γLS

(b) (c)

θ

θ

, l’angle θ n’est pas défini et γSG−γle γLG système LS > 1 et l’on parle préfère minimiser Gaz

z

(d)

Liquide

θ

h**1** γSL θ**2** si γSGγLG −γLS < −1, on parle alors de mouillage total (θ = l’aire de contact liquide-solide γLG γGS x h**2** h**12**

FIGURE 6.13 – Equilibre des forces de tension de surface au niveau de la ligne triple pour une goutte posée sur une sur- face solide (relation d’Young-Dupré).

alors de non mouillage (θ = 180◦), ou si 0◦). Dans le premier cas γLS > γSG + γLG qui coûte trop en énergie. C’est ce que l’on essaye de réaliser sur des vêtements imperméables en les enduisant de produit déperlant ou dans le fond des poêles en utilisant des revêtements anti-adhésifs. Dans le second cas γSG > γSL +γLG le contact solide-gaz coûte beaucoup d’énergie et c’est le liquide qui va séparer les deux phases. C’est ce

σ**1 1**

σ**12** σ**2 12**

62 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

que l’on appelle le mouillage total. C’est par exemple le cas d’une goutte d’huile sur du verre propre. On peut aussi introduire le paramètre d’étalement S qui, s’il est positif, prédit l’étalement du liquide :

S = γSG − γSL − γLG.

Note : La composante transverse appliquée par l’interface gaz-liquide γLG sinθ sur la surface solide (figure 6.13) est en général équilibrée par la rigidité de ce solide mais on peut parfois observer une légère déformation pour des gels très souples. Dans le cas où l’on a deux liquides et un gaz, par exemple une lentille d’huile à la surface de l’eau, il faut alors aussi écrire l’équilibre des forces verticales (figure 6.14).

6.3.2 Hystérésis de l’angle de contact

L’angle de contact dépend grandement de la propreté des surfaces et en général du mouvement présent ou passé de la goutte. S’il est mesuré pendant le mouvement de la goutte on parle d’angle de contact dynamique. Il augmente avec la vitesse d’avancée et pour les faibles angles de mouillage on peut montrer qu’il augmente comme la racine cubique de la vitesse. L’hystérésis de l’angle de contact au repos est particulièrement visible pour une goutte de pluie accrochée sur un pare-brise de voiture. Le fait que la goutte ne glisse pas malgré la pente impose que l’angle au bord le plus haut de la goutte soit plus faible que sur le bord du bas. Cette différence d’angle est lié à l’existence de rugosités, d’impuretés physiques ou chimiques sur la surface.

6.4 Effet de la gravité et longueur capillaire

Si l’on observe une grosse goutte posée sur une surface horizontale, elle n’a pas une forme sphé- rique, elle est aplatie. Il existe un compromis entre la gravité qui tend à abaisser le centre de gravité de la goutte et la tension de surface qui tend à rendre la goutte sphérique (figure 6.15). Ce compromis est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Bond (non, pas en l’honneur de James, mais d’un autre anglais, Wilfrid Noel Bond). Ce nombre est le rapport entre l’énergie potentielle de gravité d’une goutte supposée sphérique de rayon R et son énergie de surface :

Bo = ρgγ R2.

Ce nombre de Bond peut aussi s’écrire comme le rapport de deux longueurs Bo = (R/lc)2. La longueur lc est appelée longueur capillaire :

lc =

√ γρg . (6.5)

Pour Bo = 1 les effets de gravité et de tension de surface sont comparables. Si R ≫ lc les effets de gravité dominent, si R ≪ lc ce sont les effets superficiels.

• Pour de l’eau dans l’air par exemple on trouve lc ≈ 3 mm. On retrouve cette taille caractéristique en regardant la déformation de la surface de l’eau au bord d’un verre de rayon R (figure 6.16). Loin du bord la surface est horizontale car on peut négliger la force capillaire (R ≫ lc) mais près de la paroi verticale la tension de surface fait monter l’eau qui mouille partiellement le verre (θ < 90◦).

• On retrouve aussi cette longueur capillaire lc ≈ 3 mm dans la taille typique des gouttes d’eau (fi- gure 6.17), ou des premières rides observées sur l’eau lorsque le vent se lève (voir chapitre 7 page 69).

6.5. LA MESURE DE LA TENSION SUPERFICIELLE 63

FIGURE 6.15 – Déformation sous l’effet de la gravité de gouttes de mercure de taille crois- sante. D’après [29] p. 37.

FIGURE 6.17 – Instabilité de Plateau-Rayleigh d’un jet d’eau tombant (ici de gauche à droite) dans le champ de gravité et qui se fractionne en gouttes.

6.5 La mesure de la tension superficielle

Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer la tension de surface, basées sur la mesure d’une force ou d’une forme.

6.5.1 La loi de Jurin

Si on plonge un tube fin (on parle de tube « capillaire », c’est-à-dire dont le diamètre intérieur est de l’ordre de grandeur du diamètre d’un cheveu) dans un liquide, à l’équilibre la surface du liquide dans le tube n’est pas au même niveau qu’à l’extérieur (figures 6.18 et 6.19). C’est l’illustration classique des forces capillaires, autre nom des forces de tension interfaciale.

Le calcul de la hauteur h d’ascension capillaire se fait en calculant la dépression ∆p qui existe au-dessous du ménisque : ∆p = 2γ/r où r est le rayon de courbure de la calotte sphérique que forme le ménisque. Si R est le rayon du tube et θ l’angle de mouillage on a R = r cosθ et donc ∆p = 2γ cosθ/R (car r<lc). Cette dépression tire la colonne de fluide vers le haut et à l’équilibre on a donc ∆p = ρgh. Finalement

h = 2γ ρg

cosθ

R1.

A.N. Avec de l’eau, si R = 0,1 mm, on trouve h = 14 cm. La mesure de h est donc une mesure de la tension de surface si on connaît l’angle de mouillage θ et le diamètre du capillaire.

L’ascension capillaire est limitée pour l’eau à environ 10 mètres, ce qui correspond à un tube de rayon de l’ordre d’un micromètre. En effet, au-delà de cette hauteur, la pression sous le ménisque deviendrait inférieure à la pression de vapeur saturante et le liquide s’évaporerait. Ce phénomène limitant intervient dans la montée de la sève dans les arbres et est, en partie, la cause de leur taille maximale de l’ordre de quelques dizaines de mètres.

Exercice : Si on fait l’expérience non pas dans un tube, mais entre deux plaques de verre au contact d’un côté mais légèrement espacées de l’autre (figure 6.20) quelle sera la forme de la surface

FIGURE 6.16 – Ménisque sur le bord d’un verre d’eau. D’après [29] p. 39.

64 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

FIGURE FIGURE 6.18 – Illustration de la loi de Jurin

6.19 – Cas d’un liquide non mouillant ([53], p. 13). Plus le tube est fin plus le liquide

comme le mercure montrant une ascension né- monte haut.

gative.

libre?

6.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy

Les tensiomètres de Wilhelmy et de Noüy sont basés sur la mesure de la force d’arrachement qu’il faut exercer sur une lame ou un anneau de platine pour la sortir lentement du liquide. Juste avant que le film liquide qui tire l’objet vers le bas ne casse, la balance mesure une force (de l’ordre du centième de Newton) proportionnelle à la tension de surface (figures 6.21 et 6.22) : γ = F/(pcosθ) si p est le périmètre de la lame. On peut aussi mesurer par cette méthode des forces interfaciales entre deux liquides.

FIGURE 6.20 – Ascension capillaire dans le diédre formé par deux plaques de verre séparées d’un côté de l’épaisseur d’un trombone.

6.5. LA MESURE DE LA TENSION SUPERFICIELLE 65

FIGURE FIGURE 6.21 – Mesure de la tension de surface

6.22 – Méthode de la lame de Wil- par la méthode de la lame de Wilhelmy.

helmy et de l’anneau de Noüy.

6.5.3 Méthode de la goutte pendante

Juste avant qu’une goutte ne se détache d’un robinet, son poids est équilibré par la tension de surface (loi de Tate). La mesure du volume de la goutte ou de son poids est donc aussi une mesure précise de la tension de surface (figures 6.23 et 6.24) et cette méthode porte le nom de stalagmométrie. Là aussi, la méthode permet de mesurer la tension de surface entre deux liquides.

On peut aussi mesurer le profil complet de la goutte et le comparer au résultat de l’intégration d’une équation intégro-différentielle dont le seul paramètre est la longueur capillaire. Pour cela on écrit dans chaque plan horizontal l’équilibre des forces entre le poids de la goutte sous ce plan, les forces de pressions de Laplace à l’interface et la tension interfaciale ([16] p. 59).

FIGURE 6.23 – Une goutte d’alcool (à gauche) et une goutte d’eau (à droite) toutes les deux sur le point de se détacher.

FIGURE 6.24 – Détachement d’une goutte pen- dante ([53], p. 8).

66 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

6.5.4 Méthode de la goutte tournante

Cette méthode est utilisée pour mesurer les faibles tensions de surface. Voir TD n ̊4.

6.6 Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni)

La tension de surface est en général une fonction décroissante de la température, en effet elle s’an- nule au point critique (liquide et vapeur ne font plus qu’un, ils sont alors en quelque sorte miscibles). Cette variation qui porte le nom d’effet Marangoni explique les deux expériences suivantes (figures 6.25 et 6.26). Les endroits chauds, de plus faible tension de surface, sont des zones de divergence de l’écoulement de surface et conduisent donc à l’amincissement de la couche fluide, alors qu’une zone froide, de forte tension interfaciale, est une zone de convergence et donc d’épaississement.

C’est aussi un effet important pour la mise en mouvement d’un liquide avec surface libre chauffé par le bas (convection de Bénard-Marangoni (voir § 16.9 page 218).

FIGURE FIGURE 6.25 – Effet d’un point chaud fixe sous

6.26 – Effet d’un point froid se dépla- une couche mince de liquide.

çant sous une couche mince de liquide.

6.7 Les tensioactifs

Les tensioactifs sont très utilisés dans l’industrie pour fabriquer et stabiliser les mousses, ou pour contrôler l’étalement des liquides.

6.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?

Le savon est un tensioactif pour l’eau, c’est-à-dire un corps dont la présence diminue la tension de surface du liquide. Le plus souvent il s’agit de molécules amphiphiles, c’est-à-dire des molécules dont une extrémité préfère être entourée de molécules d’eau et l’autre refuse au contraire cette proximité. Ces molécules se mettent de préférence aux interfaces et elles sont donc très efficaces, même en faible quantité, pour diminuer la tension de surface (figure 6.27). En réalité il existe toujours un équilibre thermodynamique entre les molécules adsorbées en surface et des molécules présentes dans le liquide (voir Réf. [6] chap. 16). C’est cette diminution de la tension de surface qui rend l’eau savonneuse plus « mouillante » (l’angle θ est plus faible) et donc plus efficace pour détacher et dégraisser.

Dans un premier temps, plus on augmente la quantité de tensioactif plus la tension de surface diminue, jusqu’à un certain point appelé la concentration micellaire critique (c.m.c.) où les molécules amphiphiles isolées déjà présentes à l’intérieur du liquide atteignent une concentration maximale et

6.8. DYNAMIQUE DE QUELQUES ÉCOULEMENTS CONTRÔLÉS PAR LA TENSION DE SURFACE67

commencent à se regrouper sous forme de globules appelés micelles. A partir de la c.m.c., la tension de surface ne décroît plus et les molécules rajoutées augmentent seulement la taille et le nombre de micelles (figure 6.28).

6.7.2 Comment expliquer la stabilité des membranes de savon contrairement aux mem-

branes d’eau ?

Une membrane de savon est en réalité une membrane d’eau avec des molécules de tensioactif sur ses deux surfaces. Si une membrane de savon est rapidement déformée et donc étirée localement, la concentration surfacique de savon dans la partie étirée sera plus faible, la tension de surface locale y devient plus élevée qu’ailleurs et il apparaît donc une force de rappel qui tend à lutter contre la déformation initiale. Cet effet élastique, qui n’existe pas pour une membrane d’eau pure, explique la stabilité et la relative longévité des bulles de savon.

FIGURE 6.27 – Localisation des molécules am- phiphiles : à la surface de l’eau ou dans des mi- celles.

FIGURE 6.28 – Evolution de la tension de surface en fonction de la concentration C en tensioactif C12 dans de l’eau (Thèse E. Rio).

6.8 Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de

surface

1. Imbibition d’un milieu poreux ou d’un tube capillaire. Pour un tube horizontal ou vertical trouver la cinétique d’envahissement par le liquide mouillant pour un fluide parfait et pour un fluide très visqueux (lois de Washburn [16] p.130).

2. Dynamique d’étalement d’une goutte de liquide mouillant une surface solide. On trouve

des lois en t1/8 et t1/10 selon la taille de la goutte (lois de Tanner [16] p. 149).

3. Evaporation d’une goutte de café. Une goutte en forme de calotte sphérique et contenant des particules en suspension est posée sur une table. En supposant un flux d’évaporation constant, montrer que dans le référentiel de la ligne triple il existe un écoulement dans la goutte. En déduire pourquoi il reste une auréole sur la table de la cuisine [Deegan et al. (1997), Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops, Nature, 389 (6653), 827-828].

68 CHAPITRE 6. LA TENSION DE SURFACE

4. Divergence de la dissipation visqueuse au voisinage de la ligne triple d’une goutte qui avance. Dessiner le profil de vitesse du fluide dans le référentiel où la ligne triple est immo- bile. Calculer les cisaillements au voisinage de la ligne triple (on peut supposer l’angle de contact petit) et en déduire la dissipation d’énergie. Montrer qu’il existe une divergence de cette dissipation à la ligne triple. Comment résoudre ce problème ([16] p. 142) ?

Pour en savoir plus :

• Gouttes, bulles, perles et ondes, P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Belin (2006). Réf. [16].

• Why is surface tension a force parallel to the interface ?, A. Marchand, J. H. Weijs, J. H. Snoeijer, and B. Andreotti, American Journal of Physics, 79(10) :999–1008, 2011. Réf. [36].

• Liquides. Solutions, dispersions, émulsions, gels, B. Cabane et S. Hénon, Belin (2003). Réf. [6].

• Les mousses : structure et dynamique, I. Cantat et al., Belin (2010).

• 1805-2005 deux siècles de découvertes sur la capillarité, Y. Pomeau, séminaire disponible en vidéo sur http://savoirs.ens.fr//expose.php?id=194

• Surface Tension in Fluid Mechanics, Lloyd Trefethen, National Committee for Fluid Mechanics Films, http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html

Chapitre 7

Les ondes de surface

Marc Rabaud, version du 22 janvier 2016

Sommaire

7.1 Rappels sur les vitesses de phase et de groupe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70 7.2 Lesondeslinéaireseneauprofonde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70 7.2.1 Relation de dispersion des ondes entre deux fluides . . . . . . . . . . . . . 71 7.2.2 Application aux ondes à la surface de l’eau . . . . . . . . . . . . . . . . . 73 7.2.3 Paquet d’onde généré par un caillou jeté dans l’eau . . . . . . . . . . . . . 75 7.2.4 Ondes en amont et en aval d’un obstacle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77 7.2.5 Lesillageen«V» ousillagedeKelvin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77 7.2.6 Traînée de vague et vitesse limite de coque . . . . . . . . . . . . . . . . . 80 7.2.7 Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague . . . . . . . . . 82 7.2.8 Energietransportéeparlahoule . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85 7.2.9 Atténuation des ondes de surface . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86 7.3 Lesondesgravito-capillaireseneaupeuprofonde . . . . . . . . . . . . . . . . 87 7.3.1 Relationdedispersionenhauteurd’eaufinie . . . . . . . . . . . . . . . . 87 7.3.2 Casdesondeslongues . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88 7.4 Lesondesnon-linéaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90 7.4.1 LesolitondeRussel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91 7.4.2 Ressauthydraulique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91 7.4.3 Mascaret . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92 7.4.4 Tsunami . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

Nous allons ici nous intéresser aux ondes se propageant à l’interface entre deux liquides ou entre un liquide et un gaz, propagation causée par deux forces de rappel : la gravité et la tension de surface entre les deux fluides. Nous étudierons tout d’abord le cas des ondes en eau profonde puis le cas des ondes en eau peu profonde.

Comme toute déformation périodique ou localisée peut se décomposer en série de Fourier, nous étudierons d’abord le comportement d’onde plane monochromatique. La déformation de l’interface s’écrit alors ζ(x, t) = ζ0 cos(kx−ωt). Le nombre d’onde est k = 2π/λ où λ est la longueur d’onde. L’amplitude de l’onde est ζ0. La vitesse de phase est donnée par vφ = ω/k et la vitesse de groupe par vg = ∂ω/∂k.

Pour une bonne introduction sur les ondes, lire le premier chapitre de la Ref. [39].

69

70 CHAPITRE 7. LES ONDES DE SURFACE

7.1 Rappels sur les vitesses de phase et de groupe

On considère tout d’abord une onde plane monochromatique qui s’écrit :

ζ(x, t) = [A0 expi(k0x − ω(k0)t)],

où exprime la partie réelle. Son spectre est une fonction de Dirac A0δ(k − k0), sa vitesse de phase vφ = ω(k0)/k0. En effet c’est la vitesse à laquelle il faut que x augmente pour que la phase de l’onde, φ(x, t) = k0x − ω(k0)t = k0(x − Si maintenant on est en présence ω(kk0 d’un 0)

t), paquet reste constante.

d’onde, l’onde s’écrit :

ζ(x, t) =

∫ ∞0 A(k) expi(kx − ω(k)t)dk.

Si le paquet d’onde est étroit (dans l’espace de Fourier) autour de k0, on peut écrire k = k0 + δk soit :

ζ(x, t) =

∫ ∞0 A(k0 + δk) expi(k0x − ω(k0)t) expi(δkx − δωt)dk. Où δω = ω(k0 + δk) − ω(k0) A l’instant initial t = 0 on a :

≈ ∂ω∂kδk = vgδk.

ζ(x,0) = expi(k0x)F(x)

avec

F(x) =

∫ ∞0 A(k0 + δk) expi(δkx)dk. C’est donc un paquet d’onde avec une porteuse k0 et une enveloppe F(x). Pour t = 0 :

ζ(x, t) = expi[k0(x − vφt)]F(x − vgt)

avec

F(x − vgt) =

∫ ∞0 A(k0 + δk) expi[δk(x − vgt)]dk. L’enveloppe du paquet d’onde se propage bien sans changer de forme avec la vitesse de groupe vg alors que la porteuse se propage à vφ (voir figure 7.1).

Nota : on peut généraliser à des ondes tridimensionnelles où k = (k, l, m). Dans ce cas la vitesse de phase s’écrit vφ = (ω/k2) k (elle est par définition colinéaire au vecteur d’onde) et la vitesse de groupe vg = (∂ω/∂k,∂ω/∂l,∂ω/∂m). Ces deux vitesses ne sont pas forcément colinéaires si la relation de dispersion n’est pas isotrope et même elles peuvent être perpendiculaires entre elles si la relation de dispersion ne dépend pas du module de k comme nous le verrons pour les ondes internes (chap. 8 page 95) ou les ondes inertielles (§ 15.7.3 page 190).

7.2 Les ondes linéaires en eau profonde

Nous considérerons ici uniquement le cas des ondes linéaires, c’est-à-dire d’amplitude faible de- vant la longueur d’onde : ζ0 ≪ λ ou ζ0 k ≪ 1.

On note 1 le fluide inférieur et 2 le fluide supérieur et Oz l’axe vertical (figure 7.2).

7.2. LES ONDES LINÉAIRES EN EAU PROFONDE 71

FIGURE 7.1 – Evolution d’un paquet d’onde dont la vitesse de phase est le double de la vi- tesse de groupe (cas des ondes de gravité). La croix marque le milieu du paquet d’onde qui se déplace à la vitesse de groupe, la flèche suit un maximum local de l’onde et se déplace à la vi- tesse de phase (cours Berkeley III, p. 294).

7.2.1 Relation de dispersion des ondes entre deux fluides

On supposera les fluides incompressibles et surtout l’écoulement irrotationnel. En effet si on consi- dère un fluide immobile (donc forcément irrotationnel) avant l’arrivée des vagues, il doit rester irrota- tionnel, au moins à cours terme et loin des parois (la vorticité est éventuellement présente sur le fond ou à l’interface si les fluides sont visqueux). En négligeant l’effet de la viscosité, nous étudierons la propagation des ondes sans atténuation 1.

Si l’écoulement dans chaque fluide est irrotationnel, −→rot vi = 0 (avec i = 1,2) et l’on peut écrire vi = ∇Φi, le champ de vitesse dérive d’un potentiel. Si de plus l’écoulement est incompressible,

1. Un fluide parfait ne peut donc pas satisfaire les relations de Kramer-Krönig entre dissipation et dispersion.

z

(2)

n ζ(x,t) (1)

x

FIGURE 7.2 – Schéma de l’interface entre deux fluides superposés.

72 CHAPITRE 7. LES ONDES DE SURFACE

div vi = 0 et donc ∆Φi = 0. Le potentiel des vitesses satisfait l’équation de Laplace.

En recherchant des solutions périodiques propagatives dans la direction des x croissants on peut écrire : Φi = fi(z) expi(kx − ωt). Les ondes étant supposées linéaires, nous pouvons utiliser la notation complexe sans problème en prenant à la fin des calculs la partie réelle du résultat.

L’équation de Laplace impose que :

f i ”− k2fi = 0,

soit

fi(z) = Ai exp(kz) + Bi exp(−kz).

Dans le cas de milieux infinis au-dessus et au-dessous de l’interface, la condition de non diver- gence de fi pour z → ±∞ donne A2 = B1 = 0. (Le cas d’une profondeur finie sera traité au paragraphe 7.3.)

L’équation d’Euler doit être satisfait pour chaque fluide :

∂ vi ∂t + ( vi · ∇) vi = − ρ1i ∇pi + g.

Le terme convectif non-linéaire grandeur de ces deux termes car vi peut-être ∼ négligé si ( vi · ∇) vi ζ0/T, la condition devenant ≪ k ζ∂ ∂t 0/T vi . On peut estimer l’ordre ≪ 1/T soit ζ0 k de ≪ 1 ce qui correspond bien a notre choix d’ondes de faible amplitude.

L’équation devient

∂∂t ∇Φi + 1ρi ∇pi − g = 0, soit :

∇

(∂Φi

∂t + piρi + gz)

= 0,

et finalement :

pi = −ρi∂Φi

∂t − ρigz + Ci. Ceci correspond à l’équation de Bernoulli instationnaire (§ 5.3.2 ) dans laquelle on néglige le terme en v2 à cause de l’hypothèse de faible amplitude.

La surface plane devant être solution, on a C1 = C2 = Patm. En particulier à l’interface nous avons :

p1 − p2 = ρ2∂Φ∂t 2

− ρ1∂Φ1

∂t − (ρ1 − ρ2)gζ . (7.1) Conditions aux limites : elles sont de deux sortes, cinématiques (égalité des vitesses transverses à l’interface) et dynamiques (égalité des contraintes normales). Pour la première, comme l’amplitude de la déformation est faible, il suffit que : vz1 = vz2 soit :

∂Φ∂z 1

|z=ζ = ∂Φ∂z 2

|z=ζ = ∂ζ∂t. (7.2)

(La relation exacte, valable quelque soit l’amplitude de la déformation, sera donnée par l’équa- tion 10.4 page 120.) Cette condition nous donne ici la relation : k A1 = −k B2 = −iω ζ0. Ceci nous permet d’exprimer les constantes d’intégration A1 et B2 en fonction de l’amplitude de l’onde :

7.2. LES ONDES LINÉAIRES EN EAU PROFONDE 73

Φ1 = Φ2 = −iiωk ωζk0 ζexp 0 exp (−kz) (kz) expi(kx expi(kx − − ωt)

ωt) (7.3)

La condition dynamique nous dit que la différence de pression sur une interface courbée est donnée par la loi de Laplace (§ 6.2) :

pint − pext = γ

[ 1R1 + R12],

où γ est la tension de surface. Ici pour des ondes planes (invariantes en y) nous avons un seul rayon de courbure et la courbure étant faible : p1 − p2 ≈ −γ ∂x∂2ζ

2, soit :

p1 − p2 = γk2ζ (7.4)

En rassemblant ces trois résultats (équations 7.1, 7.3 et 7.4) on obtient finalement la relation de dispersion des ondes planes linéaires en eau profonde :

ω2 = ρρ1 1 − + ρ2

ρ2gk + ρ1 + γ

ρ2k3 . (7.5)

Notons que si ρ1 < ρ2 la pulsation est complexe, c’est-à-dire que l’on est en présence d’une insta- bilité. C’est l’instabilité de Rayleigh-Taylor qui sera décrite plus loin (§ 16.3 page 196). L’équation précédente peut aussi s’écrire :

ω2 = ρρ1 1 − + ρ2

ρ2gk

[1 +

( kkc)2]. (7.6)

Avec

kc = √(ρ1 − ρ2)g/γ. (7.7)

Ce nombre d’onde de coupure kc, appelé nombre d’onde capillaire, sépare le régime des ondes capillaires (petites longueurs d’onde – ou grands k – contrôlées par la tension de surface) de celui des ondes de gravité (grandes longueurs d’onde – ou petit k – gouvernées par la gravité). La relation de dispersion ω(k) n’étant pas linéaire, les ondes interfaciales sont dispersives (vφ = vg).

7.2.2 Application aux ondes à la surface de l’eau

Dans le cas des ondes à la surface de l’eau, les densités des deux fluides (air et eau) étant dans un rapport 1000 environ, on peut négliger ρ2 devant ρ1 et la relation de dispersion (Eq. 7.5) s’écrit :

ω2 = gk

[1 +

( kkc)2]. (7.8)

Dans le cas air/eau λc = 2πlc = 2π/kc ≈ 17 mm. L’évolution de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe avec le nombre d’onde est représenté sur la figure 7.3.

74 CHAPITRE 7. LES ONDES DE SURFACE

0,6

0,5

Vphase Vgroupe

0,4

0,3

0,2

0,1

k/kc

0

0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5

FIGURE 7.3 – Evolution de la vitesse de phase vφ(×) et de la vitesse de groupe vg (D) en fonction du nombre d’onde adimensionné k/kc. Pour k/kc < 1 ce sont des ondes de gravité (vg < vφ), et pour k/kc > 1 ce sont des ondes capillaires (vg > vφ).

Limite des ondes de gravité :

Si k ≪ kc (λ ≫ 17 mm) on est dans le domaine des ondes de gravité et la relation de dispersion se simplifie :

ω2 = gk. La vitesse de phase s’écrit alors vφ = √g/k = g/ω et vg = 12vφ.

La figure 7.1 représente l’évolution d’un paquet d’ondes de gravité. Des ondes naissent à l’arrière du paquet d’ondes et meurent à l’avant.

Limite dans le domaine des ondes capillaires :

Si k ≫ kc (λ ≪ 17 mm) on est dans le domaine des ondes capillaire et la relation de dispersion s’écrit :

ω2 = gk3/k2c = γρk3. La vitesse de phase s’écrit alors vφ = √γk/ρ et vg = 32vφ. En pratique ces ondes ne sont pas long- temps observables car elles sont fortement dissipée par la viscosité (§ 7.2.9 page 86).

Exercices : — Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont égales si k = kc.

7.2. LES ONDES LINÉAIRES EN EAU PROFONDE 75

— Montrer que les ondes de surface ne peuvent pas se propager en dessous d’une certaine vitesse.

Calculer ce minimum de la vitesse de phase. Montrer qu’il vaut 23 cm/s pour de l’eau pure. — Calculer la vitesse de groupe minimale. Que vaut alors k/kc?

7.2.3 Paquet d’onde généré par un caillou jeté dans l’eau

En jetant un caillou dans l’eau on injecte brutalement de l’énergie en un point et à un instant donné. Une grande partie de cette énergie est rayonnée sous forme d’ondes interfaciales radiales. Rapidement ces ondes circulaires perdent de l’amplitude (en r−1/2 car elles augmentent leur périmètre) même en l’absence de dissipation et l’on arrive ensuite dans un régime d’ondes linéaires pratiquement planes.

Si le caillou de taille L est gros comparé à la longueur capillaire, les ondes de taille L sont des ondes de gravité. Elles voyagent avec une vitesse de groupe égale à la moitié de leur vitesse de phase. Le front externe du paquet d’onde va donc moins vite que les ondes individuelles. Les ondes meurent en arrivant sur ce front avant. A l’arrière du paquet d’onde (plus vers le centre) on retrouve les ondes les plus lentes correspondant à la vitesse de groupe minimale. Ces ondes ont une vitesse de phase légèrement plus grande que leur vitesse de groupe, elles semblent donc naître sur le front arrière. Voir figures 7.4a et 7.5a. Au final on retrouve les plus grandes longueurs d’ondes à l’avant du paquet d’onde.

a) b)

FIGURE 7.4 – Schémas vus de dessus des ronds dans l’eau créés par un gros caillou jeté dans l’eau (a) et par une goutte de pluie tombant sur une surface d’eau (b).

a) t

x=(Vg)min

t

x=Vg(L)

x=Vp x=Vp

x=Vg(L)

x=Vp x=Vp x=Vg

O

x O

b) x FIGURE 7.5 – Diagrammes spatio-temporels esquissant l’évolution d’un paquet d’onde dans le plan (r, t) (a) pour un gros caillou dans l’eau (vφ > vg) et (b) pour une goutte dans l’eau (vφ < vg).

76 CHAPITRE 7. LES ONDES DE SURFACE

Si maintenant on jette un tout petit caillou de taille L<λc (ou si l’on regarde tomber des gouttes de pluie), toutes les ondes émises sont des ondes capillaires. Les ondes les plus lentes correspondent à des ondes capillaires de longueur d’onde L et elles ont donc une vitesse de phase inférieure à la vitesse de groupe. Elles se font donc rattraper par le front arrière et y meurent. Devant, il n’y a en principe par de limite à la vitesse de phase et de groupe et de très petites longueurs d’onde devraient se propager très loin en avant (avec une vitesse de groupe supérieure à la vitesse de phase). Toutefois ces petites longueurs d’onde sont aussi très vites atténuées par la viscosité (voir § 7.2.9) et ne sont pas visibles en pratique. Voir figures 7.4b et 7.5b.

50

45403530) s(t 25201510500 50 100 x 150 (m) 200 250 300 FIGURE 7.6 – Solution gravitaire à une dimension pour une perturbation initiale lorentzienne de taille 1m(L(x)=1/(1 + x2)). La vitesse de groupe, ici 5.4 m/s, est indiquée par le trait noir. La longueur d’onde locale au maximum d’amplitude est de l’ordre de la taille de la perturbation, seule longueur du problème.

Le calcul complet des ondes de gravité générées par une impulsion initiale de taille L est un très joli problème connu sous le nom de problème de Cauchy-Poisson (Lamb § 240, Havelock 1908, p. 406, Lighthill p. 248-253). Même avec une perturbation localisée qui contient toutes les longueurs d’ondes, les plus grandes longueurs d’ondes ne sont pas visibles car, se propageant très vite, leur am- plitude est atténuée par étirement à la surface de l’eau par le gradient de vitesse de groupe (figure 7.6). Même pour une perturbation localisée, qui contient un maximum d’énergie dans les grandes longueurs d’ondes, on observe finalement un paquet d’onde où le nombre d’onde dominant correspondant à la

7.2. LES ONDES LINÉAIRES EN EAU PROFONDE 77

taille L de l’objet (kL ∼ 2π/L). Ce paquet d’onde voyage à la vitesse de groupe de ce nombre d’onde kL.

7.2.4 Ondes en amont et en aval d’un obstacle

Supposons que l’on place verticalement un bâton dans une rivière s’écoulant à la vitesse U. Pour cet obstacle l’écoulement est indépendant du temps, et l’on observera une déformation stationnaire de l’interface. Pour les ondes se propageant dans le sens du courant, cela veut dire que vφ = −U. Si on se reporte à la figure 7.3, on voit que si U>Umin il existe deux longueurs d’onde possibles, une longueur d’onde dans le domaine capillaire λ1 < λc et une dans le domaine des ondes de gravité λ2 > λc. En observant un bâton dans l’eau (figure 7.7) on peut voir en effet des ondes capillaires immobiles en amont (car leur vitesse de groupe vg > vφ = −U) mais amorties par la viscosité assez rapidement et les ondes de gravité immobiles en aval de l’obstacle (car vg < vφ = −U).

La forme complète des ondes capillaires stationnaires en amont d’un obstacle ponctuel a été étu- diée par Poncelet (1831) puis par Kelvin et Helmholtz [14].

FIGURE 7.7 – Photographie montrant les ondes fixes autour d’un bâton immobile dans un ruisseau. Les petites longueurs d’onde sont en amont (à droite) et les plus grandes en aval (à gauche).

7.2.5 Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin

Rappelons d’abord ce qui se passe pour des ondes non dispersives comme les ondes sonores. Pour cela considérons un avion supersonique qui se déplace à vitesse constante U. Lorsque qu’il était au point M (figure 7.8a) il a émis des ondes sphériques qui se propagent à la célérité c (constante, quelque soit le nombre d’onde pour un milieu non dispersif comme l’air en première approximation). Ces ondes ont atteint le point H tel que MH = c∆t alors que l’avion a parcouru pendant ce temps là la distance MO = U ∆t (avec U>c). Les ondes émises par tous les points M pendant ∆t sont donc toutes arrivées sur le bord du cône dont l’angle θ est donné par la relation : sinθ = MH/MO = c/U. On appelle nombre de Mach le rapportMa = U/c, et donc sinθ = 1/Ma. L’onde de choc correspond à l’accumulation des ondes de pression sur ce cône et n’existe que si Ma > 1.

Revenons maintenons aux ondes de surface générées par un objet ponctuel se déplaçant à la vitesse U. Nous ne considérerons ici que des ondes de gravité. Le milieu étant dispersif, il faut raisonner d’abord pour chaque nombre d’onde k (figure 7.8b). Cette fois-ci, pour des ondes de gravité vg = 12vφ,

78 CHAPITRE 7. LES ONDES DE SURFACE

l’énergie de l’onde émise en M n’est pas arrivée en H mais en H’ (avec MH = 12MH). Toutes les ondes de nombre d’onde k émises pendant ∆t sont arrivées sur le bord du triangle d’angle au sommet α(k). On a la relation :

tan(θ − α) = H H/HO = 12MH/HO = 12 tanθ . En développant il vient :

tanα(k) = tanθ

2 + tan2 θ , avec sinθ(k) = vφ(k)/U.

FIGURE 7.8 – Construction du cône de Mach (a) et du sillage de Kelvin (b)

Si on laisse maintenant varier le nombre d’onde k, leur vitesse de phase vφ(k) et donc l’angle θ(k) vont lorsque √2/4. varier Au-delà θ varie aussi. entre de En cet 0 étudiant angle et π/2 maximum (figure la variation 7.9). α0 Ce = de arcsin(1/3) la maximum fonction correspond α(k) ≈ 19,47 on voit åucune à tanθqu’elle 0 onde = possède √n’est 2 et donc observée. un maximum tanα0 En- = deçà de cette angle il existe deux longueurs d’onde différentes pour le même angle. On a accumulation d’énergie lorsque dα/dk = 0, et donc un maximum d’amplitude au voisinage du dièdre d’angle α0 2. Les vagues qui sont observées au maximum d’amplitude sont des ondes d’une longueur d’onde particulière k0 dont les crêtes font un angle θ0 = 54,73åvec l’axe du navire (en effet leur vitesse de phase est dirigée selon MH). Elles font donc en angle θ0 − α0 = 35,26åvec le bord du sillage. C’est ce sillage d’angle constant qui est aussi observé derrière des canards sur une mare (figure 7.10b et c), du moment qu’ils se déplacent en ligne droite et à une vitesse supérieure à la vitesse minimum d’apparition des ondes de surface. Dans le cas des navires de grandes longueurs ou de forme assez rectangulaire comme une péniche, on peut observer deux sillages de Kelvin bien distincts : celui de l’étrave et celui de la poupe.

Notons que dans ces problèmes de sillage d’avion ou de bateau, l’écoulement est stationnaire dans le référentiel de l’obstacle, on s’intéresse donc aux solutions stationnaires dans ce référentiel. Il faut donc que la vitesse du bateau projetée dans la direction de propagation k des ondes soit égal à la vitesse de phase, ce qui peut s’écrire U sin(θ) = vφ ou encore U · k = ω. Cela correspond à une fréquence Doppler ω = ω − U · k nulle dans le référentiel de l’obstacle. Pour le nombre d’onde vφ(k0)/U, soit comme vφ = des √vagues g/k divergentes : k0 = du sillage g

U2 sin2 θ = 32

en V nous avons la relation : sinθ0 = vitesse d’un bateau sur une simple photo si on possède l’échelle. Ug2. Cette De même relation on peut permet mesurer de mesurer la vitesse la

2. Ce problème est assez similaire au maximum de déviation des rayons lumineux dans une goutte d’eau qui explique les couleurs de l’arc-en-ciel.

7.2. LES ONDES LINÉAIRES EN EAU PROFONDE 79

25

20151050100 *k* / *k*g 101 102 FIGURE 7.9 – Evolution de l’angle de radiation α sur lequel se trouve l’énergie en fonction du nombre d’onde k/kg, où kg = g/U2 est le plus petit nombre d’onde se propageant à la vitesse du bateau et dans la direction du mouvement.

d’un bateau en mesurant la période T0 =

√ 23 2πg U des ondes arrivant sur la plage ou les berges. Ces ondes sont très étudiées actuellement car elles sont une source importante d’érosion des berges des rivières et des canaux. Ce phénomène porte le joli nom de batillage.

Démonstration géométrique du sillage de Kelvin

Voici une deuxième démonstration inspirée du livre de Whitham [52]. Puisque pour toutes les longueurs d’onde, la droite MH fait en angle droit avec la droite HO (figure 7.8b) lorsque k et donc θ varie le point H décrit un demi-cercle de diamètre MO (figure 7.10a). Le point H’ situé au milieu de MH décrit donc lui un demi-cercle de diamètre MI. L’énergie ne peut donc pas atteindre de point situé à l’extérieur de la droite issue de O et qui tangente le cercle de diamètre MI. Le sinus de l’angle maximum α0 est donc donné par sinα0 = 3MI/2 MI/2

= 1/3, soit α0 = 19,47 ̊.

Les « trompettes de Kelvin »

En plus de l’angle du maximum de déviation des vagues dans le sillage on peut chercher qu’elle est la forme des crêtes des vagues qui suivent le bateau. Pour selon supposons que le bateau soit en O à l’instant t mais était en M à l’instant 0 (figure 7.8b). Si Ox est l’axe de déplacement du bateau on a M = (−Ut,0). Le point H’ à donc pour coordonnées H = (−Ut + vgtcosφ, vgtsinφ) où φ est l’angle entre la direction de propagation de l’onde de nombre d’onde k issue de M et l’axe du déplacement du bateau. La condition de stationnarité des ondes vis-à-vis du bateau impose U cosφ = vφ. Si l’on pose vg = rvφ pour traiter à la fois le cas des ondes de gravité (r = 1/2) et les ondes capillaires (r = 3/2) et en écrivant X = Ut, il vient :

80 CHAPITRE 7. LES ONDES DE SURFACE

M

H

O

a)

Ηs

Ι

FIGURE 7.10 – Construction géométrique du sillage de Kelvin (a) et exemples du sillage de canards (b,c).

{x = −X(1 − r cos2 φ)

y = Xrcosφsinφ (7.9)

Nous devons maintenant écrire que lorsque X ou l’angle φ varient légèrement le point H’ varie de (dx, dy) (on différentie les équations précédentes à r = Cste) et que cette variation conduit à un déplacement dl qui doit être perpendiculaire au vecteur d’onde pour rester sur une crête soit : dxcosφ + dy sinφ = 0.

On obtient alors l’équation qui lie X et φ :

X = X0(cosφ)( r

1−r ).

Ce qui donne en reportant dans l’équation paramétrique précédentes :

{x = −X0(cosφ)( r

1−r )(1 − r cos2 φ) y = X0(cosφ)( r1−r )rcosφsinφ (7.10) Ces courbes sont tracées sur la figure 7.11.

7.2.6 Traînée de vague et vitesse limite de coque

Les ondes de surface émissent par l’obstacle en mouvement dans un fluide au repos transporte de l’énergie loin de l’obstacle. On dit qu’elles rayonnent de l’énergie à l’infini. Cette énergie est fournie

b)